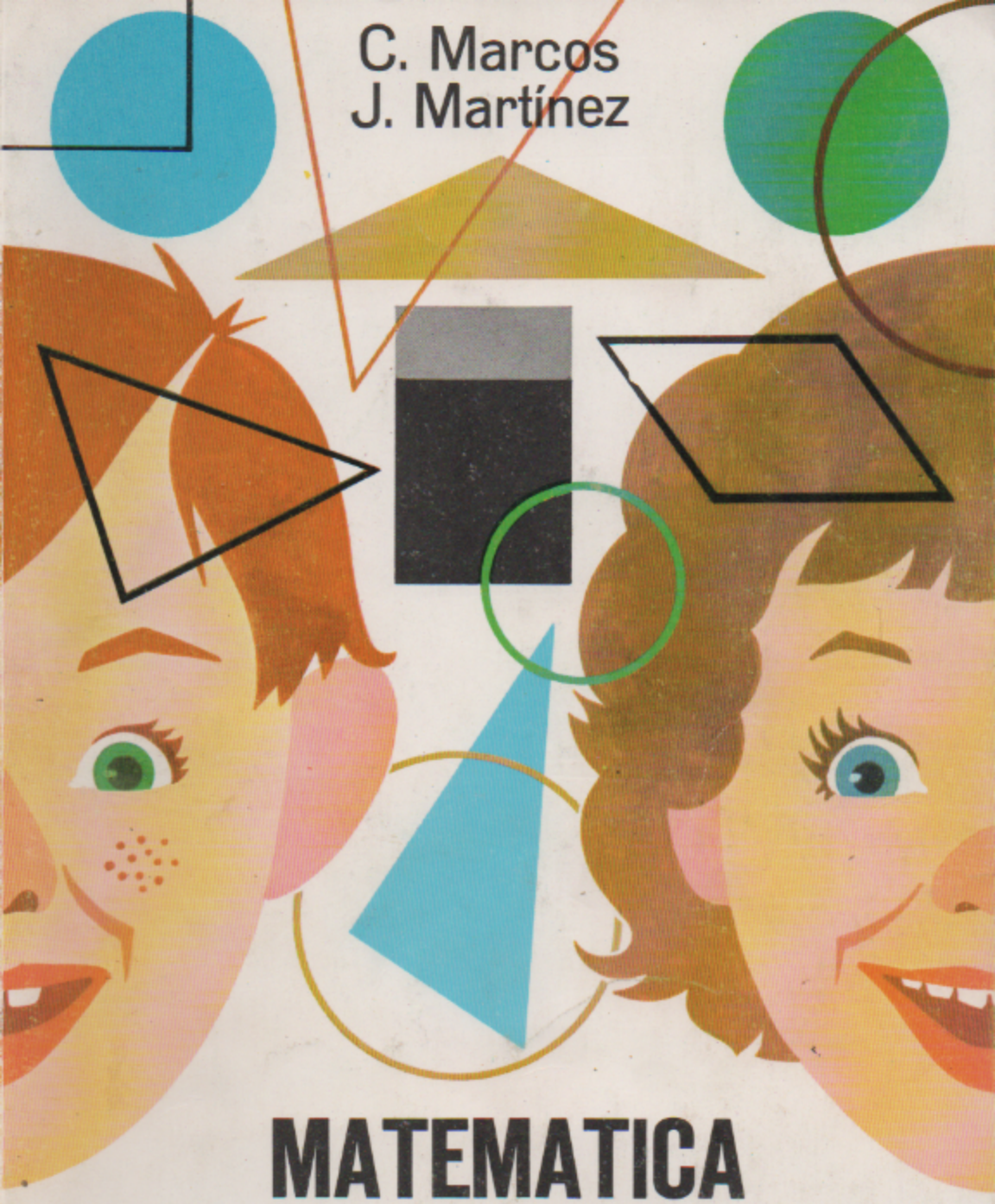
C. Marcos
J. Martínez



MATEMATICA MODERNA 2.º

MATEMATICA MODERNA 2.º

CONSTANTINO MARCOS, S. M.
Licenciado en Ciencias Físicas

JACINTO MARTINEZ, S. M.
Doctor en Ciencias Exactas

MATEMATICA MODERNA

2.º

Plan 1967

Aprobado por el M. de E. y C.
Orden del 25-III-69
Boletín Oficial del 1-IV-69

EDICIONES, S. M.
Gral. Tabanera, 39 • MADRID 19

en distribución con

BIBLIOGRAFICA ESPAÑOLA, S. A. • **EDITORIAL BRUÑO** • **EDITORIAL L. VIVES**
Nieremberg, 14 - MADRID
Bocángel, 15 - MADRID
Fdo. el Católico, 63 - ZARAGOZA

© Copyright by
EDICIONES S. M.

Con las debidas licencias
Derechos reservados
Depósito legal: M. 4461.—1968

Composición e impresión:
"Selecciones Gráficas"
Avda. Dr. Federico Rubio y Galí, 184
Madrid (1968)

IMPRESO EN ESPAÑA

PROLOGO

Continuamos en este tomo el carácter renovador de nuestra MATEMATICA MODERNA 1.º, que tanto ha agradado a Profesores y alumnos. Como aquel libro, éste se inspira en los Cuestionarios para Segundo Curso de Bachillerato publicados en el Boletín Oficial del Estado de 30 de septiembre de 1967.

La materia expuesta ha sido experimentada en varios Centros docentes durante dos cursos consecutivos, por lo que abrigamos la convicción de que está debidamente contrastada en el diario quehacer de la clase.

La diferencia con el Programa tradicional es aquí más acusada que en el Primer Curso, pues entramos ya de lleno en los Métodos de la llamada Matemática Moderna, cuidando siempre el carácter marcadamente práctico, concreto y experimental, de acuerdo con la edad y sicología de los niños a los que se destina.

Introduciéndolos a base de elementos materiales, como cartón, regletas, papeles, dibujo, etc., la experiencia nos ha indicado que los muchachos a esta edad son capaces de captar los conceptos de grupo *y* semigrupo, *sinónimos del de magnitud, al que hasta ahora nos referíamos sin saber exactamente de qué estábamos hablando.*

En la Enseñanza de las Matemáticas se ha venido cometiendo el error de medir las magnitudes antes de conocerlas, con lo que se llegaba a una petición de principio en virtud de la cual se producía una desorientación mayúscula en la mente de los pequeños escolares, que por milagro, y siempre a trompicones, podían entender lo que les explicábamos. Hay que establecer, pues, netamente la distinción entre la magnitud y su medida, tal como se hace en este libro.

La primera parte del mismo sirve para ampliar las ideas sobre conjuntos, y en especial sobre las relaciones de equivalencia, que ha de manejar el estudiante a lo largo de todo el curso.

La introducción de los números enteros como clases de pares

de números naturales se hace de modo bien asequible e inteligible para los escolares, buscando siempre el apoyo en ejemplos de la vida corriente.

El niño comprende y resuelve mucho mejor los problemas cuando éstos se refieren a temas que le interesan, y, al mismo tiempo, tiene bajo su vista un adecuado dibujo que lo representa. Entiende los teoremas mucho más fácilmente cuando están materializados por un gráfico intuitivo y claro o una sugestiva figura alusiva al mismo. De ahí la gran cantidad de grabados a varias tintas que hemos colocado a todo lo largo del texto, buscando al mismo tiempo romper la monotonía y hacer amena e interesante la materia estudiada.

Proponemos numerosos ejercicios, de dificultad creciente, para facilitar la labor de los señores profesores al indicar a los muchachos los trabajos escritos. El método activo, que indiscutiblemente es, en Matemáticas como en las demás asignaturas, el mejor método didáctico, encontrará en este libro materia abundante y escogida en que ejercitar a los alumnos, provocando constantemente en ellos una actividad personal y creadora.

Terminamos agradeciendo a cuantos con sus consejos han contribuido a que este libro salga en la forma que lo hace. Por la claridad en la exposición de la teoría, la disposición de ésta y de los ejercicios, la abundancia de los mismos y de las figuras, creemos entregar un instrumento útil para los alumnos y profesores.

LOS AUTORES

INDICE

		Págs.
1.	Conjuntos: definiciones	11
2.	Identidad de conjuntos	18
3.	Producto de conjuntos	22
4.	Relaciones binarias	28
5.	Relaciones de equivalencia	35
6.	Correspondencias entre conjuntos (funciones)	41
7.	El número entero	47
8.	Adición de números enteros	58
9.	Propiedades de la adición de números enteros	68
10.	Sustracción de números enteros	74
11.	Sumas algebraicas	80
12.	Ordenación de los números enteros	85
13.	Multiplicación de números enteros	89
14.	Propiedades de la multiplicación de números enteros	96
15.	División exacta de números enteros	103
16.	Potenciación de números enteros	114
17.	Igualdades notables	123
18.	Raíz cuadrada de números enteros	128
19.	Teorema de Pitágoras	137
20.	Movimientos del plano sobre sí mismo	146
21.	Isomorfismo de arcos y ángulos centrales en una circunferencia.	159
22.	Medida de arcos y ángulos	167
23.	Divisibilidad numérica	174
24.	Números primos y compuestos	183
25.	Unidades de volumen	194
26.	Unidades de capacidad y de masa (peso)	205
27.	Prismas	212
28.	Pirámides	220
29.	El cilindro	226
30.	El cono	231
31.	La esfera	237
32.	Movimientos de la Tierra y medida del tiempo	244

1

Conjuntos: definiciones

1. Idea de conjunto y relación de pertenencia.—El grupo de provincias gallegas (Lugo, La Coruña, Pontevedra y Orense), es un *conjunto* llamado *Galicia*, y cada una de esas provincias es un *elemento* de ese conjunto. Si este conjunto lo designo por G, se escribe que cualquiera de esas provincias "*es un elemento de* G" mediante la notación

$$\text{Lugo} \in G, \quad \text{La Coruña} \in G, \quad \text{Pontevedra} \in G, \quad \text{Orense} \in G,$$

que se leen: Lugo, La Coruña, Pontevedra, Orense, *pertenecen a* G.

En general, si a *es un elemento de* C, o lo que es lo mismo a *pertenece a* C se escribe

$$a \in C$$

Madrid *no es elemento* del conjunto Galicia, y esto se escribe designando a Madrid por m:

$$m \notin G$$

que se lee "m *no pertenece a* G".

Otras palabras que se emplean como sinónimas de conjunto son: colección, grupo, clase, asociación, colectividad.

Por tanto: *Un conjunto es cualquier colección bien definida de objetos.*

Bien definida significa que es posible determinar fácilmente si un objeto es o no es *elemento del conjunto*. Por ejemplo, el conjunto de los cinco mejores actores de cine no está bien determinado, porque el criterio para juzgar a un hombre como gran actor de cine varía mucho de unas personas a otras.

EJEMPLOS. a) Si C = conjunto de vocales del alfabeto español, entonces $i \in C$, pero $n \notin C$.

b) Si B = conjunto de los meses cuya inicial es J, entonces junio, julio $\in B$, pero agosto $\notin B$.

c) Si N = conjunto de los números naturales, entonces $3 \in N$ y $15 \in N$, pero $\frac{3}{4} \notin N$ y $-2 \notin N$.

2. Descripción de un conjunto.—Considera los siguientes conjuntos:

1.° Un rebaño de ovejas que pasa.
2.° Los alumnos de esta clase.
3.° El conjunto de las mesas del comedor.
4.° Los ríos de España.
5.° Las capitales de los estados europeos.
6.° Las vocales del alfabeto: *a, e, i, o, u.*
7.° Los números 1, 3, 5, 7, 9.

En los ejemplos 1.°, 2.°, 3.°, 4.° y 5.° los conjuntos dados están definidos por alguna propiedad *característica*, es decir, por una propiedad que poseen todos sus elementos y que sólo ellos la poseen: es lo que se llama *definición por comprensión.*

En los ejemplos 6.° y 7.° los conjuntos se dan enumerando sus elementos: es lo que se llama *definición por extensión.*

Si definimos por extensión un conjunto particular, por ejemplo, suponemos que A consta de los números 2, 4, 6 y 8, se escribe

$$A = \{2,\ 4,\ 6,\ 8\}$$

esto es, se separan los elementos mediante comas y se encierran entre corchetes { }. Pero si definimos por comprensión un conjunto particular, por ejemplo, suponemos que B es el conjunto de los números impares, entonces se emplea una letra, de ordinario la x, para representar un elemento cualquiera y se escribe

$$B = \{x | x \text{ es impar}\}$$

que se lee "*B es el conjunto de números x tales que x es impar*". El segmento vertical "|" se lee "*tal que*".

EJEMPLOS:

$A_1 = \{x | x \text{ es una oveja del rebaño}\}$
$A_2 = \{x | x \text{ es un alumno de esta clase}\}$
$A_3 = \{x | x \text{ es una mesa del comedor}\}$
$A_4 = \{x | x \text{ es un río de España}\}$
$A_5 = \{x | x \text{ es una capital de estado europeo}\}$
$A_6 = \{a, e, i, o, u\}$
$A_7 = \{1, 3, 5, 7, 9\}$

3. Conjunto unitario y conjunto vacío.—Sea A el conjunto de los alumnos de esta clase que tienen 20 años. A está bien definido, pero no tiene ningún elemento. Se le considera como verdadero conjunto, y se le llama **conjunto vacío.** Se le representa por ϕ o $\{\}$. Del mismo modo, puede haber conjuntos de un solo elemento, llamados **conjuntos unitarios.** Por ejemplo, el conjunto B de los satélites naturales de la Tierra es el conjunto

$$B = \{\text{Luna}\}$$

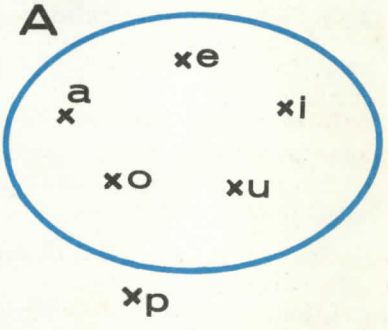
Ejemplos de conjuntos vacíos son:

a) El conjunto de los números naturales comprendidos entre 5 y 6.

b) El conjunto de puntos comunes a dos circunferencias exteriores.

c) El conjunto de puntos comunes a dos rectas paralelas.

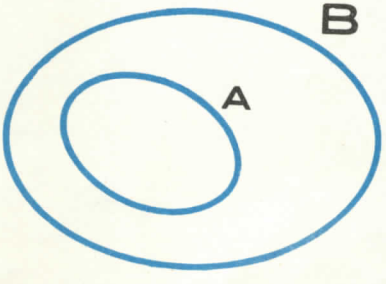
4. Partes de un conjunto y relación de inclusión.—Es corriente representar un conjunto A, mediante **diagramas de Venn,** por un recinto cerrado, dentro del cual se señalan tantos puntos como elementos tenga el conjunto. Por ejemplo, en la figura se ha representado el conjunto



$$A = \{a, e, i, o, u\}$$

de las vocales del alfabeto. Si queremos representar que la letra p no pertenece al conjunto A, señalamos un punto fuera del recinto para representar la letra p.

El conjunto A de las vocales se dice que es una **parte** o **subconjunto** del conjunto B de las letras del alfabeto, ya que cada vocal es una letra del alfabeto.



Esto lo representaremos, mediante diagramas de Venn, colocando el recinto que representa el conjunto A dentro del que representa al conjunto B.

En general, *un conjunto A es* **parte** *o* **subconjunto** *de un conjunto B cuando todo elemento de A pertenece a B.*

Esto se designa con la notación

$$A \subset B$$

A la relación expresada por el signo $\subset$ se le llama **relación de inclusión.**

También es corriente representar esta relación mediante un **diagrama lineal.** Por ejemplo, si $A \subset B \subset C$, escribiremos A delante de B, y éste delante de C, y unidos mediante una línea recta. Así:

EJEMPLOS. 1.° El conjunto $E=\{1, 2, 3, 4\}$ es un subconjunto del conjunto $F=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

2.° El conjunto L de los "alumnos de esta clase que llevan lentes" es *una parte* del conjunto C de los alumnos de la misma clase:

$$L \subset C$$

3.° El conjunto C de los alumnos de esta clase que miden más de 1 metro es la totalidad C de éstos. Luego

$$C=\{x \in C | x \text{ mide más de 1 m}\} \subset C$$

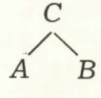
Luego *todo conjunto es un subconjunto o parte de sí mismo.*

4.° El conjunto de los alumnos de esta clase que miden más de 2 metros es una parte del conjunto C de los alumnos de la clase. Y es evidente que

$$\phi=\{x \in C | x \text{ mide más de 2 m}\} \subset C$$

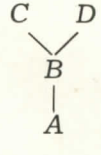
Luego *el conjunto vacío* ϕ *se considera como una parte de todo conjunto.*

5.° Sea $A=\{x\}$, $B=\{y\}$, $C=\{x, y\}$. El diagrama que relaciona A, B y C es



6.° Sea $A=\{a\}$, $B=\{a, b\}$, $C=\{a, b, c\}$, $D=\{a, b, h\}$.

El diagrama lineal que relaciona A, B, C y D es



5. Conjunto de las partes de un conjunto.—Sea el conjunto $U=\{a, b, c\}$ de las tres primeras letras del alfabeto. Halla todos los subconjuntos o partes de U.

Además del conjunto **vacío** ϕ, tenemos los conjuntos **unitarios:**

$$A=\{a\}, \quad B=\{b\} \quad \text{y} \quad C=\{c\}$$

los **binarios:**

$$D=\{a, b\}, \quad E=\{a, c\} \quad \text{y} \quad F=\{b, c\}$$

y el mismo

$$U=\{a,\ b,\ c\}$$

Son, en total, 8.

El conjunto de las partes de U se representa por $P(U)$. El conjunto $P(U)$ se compone, por tanto, de 8 elementos, o sea

$$P(U)=\{\phi,\ A,\ B,\ C,\ D,\ E,\ F,\ U\}$$

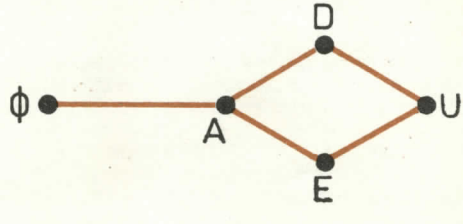
El conjunto U en este caso se llama **conjunto universal,** o sea, es el conjunto más amplio y que contiene a todos los demás.

EJEMPLOS. 1.° Halla el conjunto de las partes del conjunto $U=\{a, b\}$.

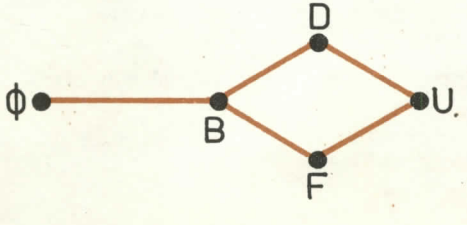
2.° Traza un diagrama lineal del conjunto $P(U)$ siendo $U=\{a, b, c\}$, según la relación de inclusión.

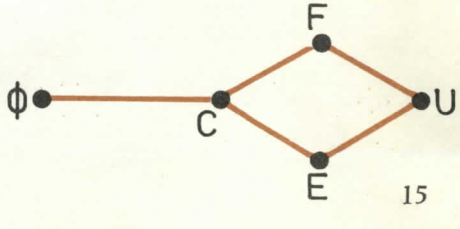
Tenemos los siguientes diagramas parciales:

$\phi \subset A \subset D \subset U$
$\phi \subset A \subset E \subset U$ que se resumen en éste



y análogamente:





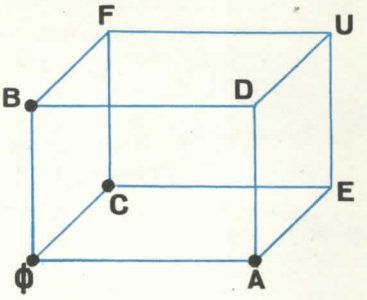
Cada uno está relacionado con los que se encuentran en línea ascendente con él. Los tres esquemas anteriores se resumen en el siguiente:

El U está relacionado con todos porque contiene a todos.

El A y el B no están relacionados, porque ni el A contiene al B, ni el B contiene al A, etc.

3.º Halla el número de elementos del conjunto $P(U)$, según el número de elementos de U, que representaremos por $n(U)$.

Los tienes en este cuadro:



Conjunto U	$n\,(U)$	$P(U)$	$n\,(P)$
ϕ	0	ϕ	1
$\{a\}$	1	$\phi, \{a\}$	2
$\{a, b\}$	2	$\phi, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}$	4
$\{a, b, c\}$	3	$\phi, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}$	8

Si $U = \{a, b, c, d\}$, entonces es

$$P(U) = \left\{ \phi, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}, \{a, b, c, d\} \right\}$$

Por tanto, $n(P) = 16$.

EJERCICIOS

1. ¿Cuáles de los siguientes objetos forman conjuntos, según la definición de éstos?

a) El conjunto de las tres mejores composiciones musicales.
b) El conjunto de todos los meses del año cuya letra inicial es *D*.
c) El conjunto de palabras que aparecen en este libro.

2. Designemos por C el conjunto de todos los cuadriláteros de geometría plana. Mediante los símbolos "$\in$ y $\notin$", indicar la relación de pertenencia para cada una de las siguientes figuras:

a) Un rombo r. b) Un cuadrado c. c) Un paralelogramo.
d) Un hexágono h. e) Un rectángulo r'. f) Un pentágono.
g) Un trapecio z. h) Un círculo c'.

3. ¿Cuáles de los siguientes conjuntos tienen elementos que son también conjuntos?

a) El conjunto de las regiones de España.
b) La Orquesta Sinfónica de San Sebastián.

c) La Federación de los Sindicatos de estudiantes.
d) Las Naciones Unidas.

4. Da dos ejemplos de conjuntos bien definidos.

5. Describe los siguientes conjuntos en notación matemática. Si el conjunto es finito, indica el número de elementos que pertenecen al conjunto.

a) El conjunto de las letras de la palabra *colocándolos*.
b) El conjunto de los números naturales pares.
c) El conjunto de las consonantes en el alfabeto español.
d) El conjunto de todos los triángulos equiláteros.

6. Escribe por extensión los siguientes conjuntos:

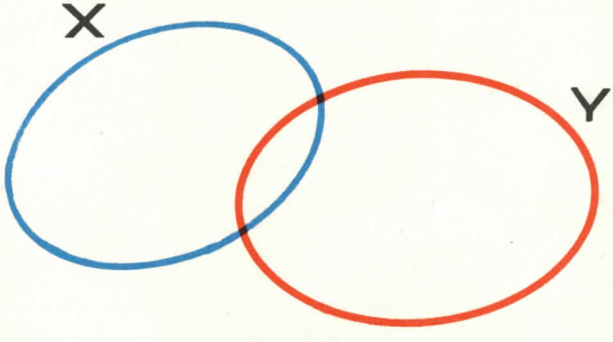
a) $A=\{x|x$ es un número natural par menor que $12\}$.
b) $B=\{x|x$ es un mes del año con menos de 30 días$\}$.
c) $C=\{x|x$ es un número natural impar$\}$.

7. Escribe todos los subconjuntos de cada uno de los conjuntos dados:

a) $\{3, 5\}$.
b) $\{2, 4, 6\}$.
c) {Luis, Javier, Pedro}.
d) $\{1, 2, 3, 4\}$.

8. Di el número de subconjuntos en cada uno de los casos del problema anterior.

9. Los conjuntos X e Y están representados por el diagrama siguiente:



¿Podemos escribir que $X \subset Y$ o que $Y \subset X$, o sea, podemos decir que los conjuntos X e Y están relacionados por la relación de inclusión?

10. Escribe las siguientes propiedades:

a) y no pertenece a B;
b) F es un subconjunto de E;
c) h es un elemento de C;
d) R no incluye a S.

11. Sea $H=\{r, s, t\}$. Establece si alguna de las cuatro expresiones siguientes es correcta o incorrecta. Si alguna es incorrecta, di por qué:

a) $r \in H$; b) $r \subset H$; c) $\{r\} \in M$; d) $\{r\} \subset H$

2

Identidad de conjuntos

6. Definición.—Los conjuntos $A=\{1, 2, 3\}$, $B=\{3, 2, 1\}$ y $C=\{2, 1, 3\}$ constan de los mismos elementos, aunque estén colocados en distinto orden. Se dice que son **idénticos.**

Dos conjuntos *A* y *B* son idénticos cuando tienen los mismos elementos, esto es cuando todo elemento de A pertenece a B, y todo elemento de B pertenece a A.

La identidad de dos conjuntos A y B se representa por

$$A \equiv B$$

EJEMPLOS:

1.° Sea $A=\{\text{Luis, José, Pedro, Juan}\}$
$B=\{\text{Pedro, José, Luis, Juan}\}$

Luego $A \equiv B$.

Se ve que un conjunto no varía si sus elementos se dan en diferente orden.

2.° Sea $M=\{a, b, c, d\}$ y $N=\{a, b, a, b, c, d, c\}$.

Luego $M \equiv N$, ya que cada elemento de M pertenece a N y cada elemento de N pertenece a M. Se ve que un conjunto no varía aunque tenga elementos repetidos, los cuales se cuentan una sola vez, pues, por ejemplo, no hay más que una letra a en el alfabeto.

3.° ¿Son idénticos el conjunto X de las letras de la palabra TORRE y el conjunto Y de las letras de la palabra RETO? ¿Y el conjunto Z de las letras de la palabra TORERO? Sí, los tres son idénticos, porque $X \equiv Y \equiv Z=\{t, o, r, e\}$.

4.° ¿Son idénticos los conjuntos siguientes:

a) $A=\{2, 3, 4, 5\}$, $B=\{x \in N \mid x$ está entre 1 y $6\}$?

Ambos conjuntos son idénticos, es decir, $A \equiv B$.

b) $A=\{x \in N \mid x$ menor que $5\}$
$B=\{x \in N \mid (x+1)^2$ menor que $26\}$.

Luego, $A \equiv B$, ya que $A=\{1, 2, 3, 4\}$ y $B=\{1, 2, 3, 4\}$.

c) $A = \{x \in N \mid x \text{ es impar}\}$
$B = \{x \in N \mid x^2 \text{ es impar}\}$.

También aquí $A \equiv B$ porque los cuadrados de los números impares son números impares.

d) $A = \{x \mid x \text{ es un triángulo}\}$
$B = \{x \mid x \text{ es un polígono}\}$.

En este caso, $A \neq B$, porque todo triángulo es un polígono, pero no todo polígono es un triángulo.

7. Propiedades de la identidad de conjuntos.

1.ª **Reflexiva:** $A \equiv A$.

Todo conjunto A es idéntico a sí mismo.

2.ª **Simétrica:** Si $A \equiv B$, es $B \equiv A$.

3.ª **Transitiva:** Si $A \equiv B$ y $B \equiv C$, es $A \equiv C$.

Estas tres propiedades caracterizan a un conjunto de relaciones que, como veremos más adelante, se llaman **relaciones de equivalencia** o de igualdad.

EJEMPLOS. 1.º Comprueba la propiedad simétrica con los conjuntos $A = \{5, 6\}$ y $B = \{x \in N \mid x \text{ está entre } 4 \text{ y } 7\}$.

2.º Comprueba la propiedad transitiva con los conjuntos

$A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$.

$B = \{x \in N \mid x = \text{número impar menor que } 11\}$.

$C = \{x \in N \mid x^2 = \text{número impar menor que } 121\}$.

8. Propiedades de la relación de inclusión.

1.ª **Reflexiva.** $A \subset A$.
Todo conjunto es un subconjunto de sí mismo.
Por ejemplo, si $A = \{4, 5\}$ y $B = \{5, 4\}$ se tiene

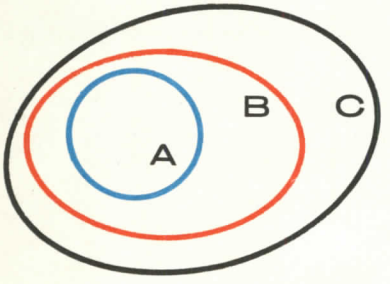
$$\{4, 5\} \subset \{5, 4\}$$

2.ª **Antisimétrica.** Si $A \subset B$ y $B \subset A$, es $A \equiv B$.

Por la misma definición de identidad de conjuntos.

3.ª **Transitiva.** Si $A \subset B$ y $B \subset C$, es $A \subset C$.

Por ejemplo, sea $A = \{x \mid x = \text{vaca}\}$, $B = \{x \mid x = \text{rumiante}\}$ y $C = \{x \mid x = \text{mamífero}\}$. Se deduce $A \subset B$ y $B \subset C$; luego $A \subset C$.



Representa mediante diagramas de Venn, los tres conjuntos A, B y C que cumplen la propiedad transitiva de la inclusión.

Las tres propiedades: reflexiva, antisimétrica y transitiva, caracterizan un conjunto de relaciones que se denominan **relaciones de ordenación** o de orden, porque establecen una cierta prioridad de unos conjuntos respecto de otros.

EJERCICIOS

1. Si $A=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $B=\{2, 4, 6\}$, $C=\{3, 5, 7, 9\}$, contesta: a) ¿Es $A \subset B$?; b) ¿es $B \subset A$?; c) ¿es $C \subset A$?; d) ¿es $B \subset C$?

2. Si $a \in A$, $b \in B$, $A \subset C$ y $B \subset C$, contesta: a) ¿$a \in C$?; b) ¿$b \in A$?; c) ¿puede haber un elemento $c \in C$ tal que $c \notin A$ y $c \notin B$; d) ¿puede haber un elemento $c \in C$ tal que $c \in A$ y $c \notin B$?

3. Mediante los símbolos $\subset$ y $\not\subset$, escribe las 20 relaciones que ligan por parejas los conjuntos siguientes:

$A=\{\text{cuadriláteros}\}$; $B=\{\text{rectángulos}\}$; $C=\{\text{cuadrados}\}$;
$D=\{\text{paralelogramos}\}$; $E=\{\text{trapecios}\}$.

4. Para los tres conjuntos A, B y C, determina si las siguientes expresiones son ciertas o falsas. Por cada expresión falsa, construye un ejemplo que confirme tu conclusión:

a) Si $B \equiv A$ y $A \equiv C$, entonces $B \equiv C$;
b) Si $B \subset C$ y $B \subset A$, entonces $C \subset A$;
c) Si $B \subset A$ y $A \in C$, entonces $B \in C$;
d) Si $B \equiv C$ y $B \in A$, entonces $C \in A$.

5. ¿Cuáles de los siguientes conjuntos son iguales: $\{r, s, t\}$, $\{r, s, t, r\}$, $\{r, s, t, s\}$, $\{s, r, t, t\}$?

6. ¿Cuáles de los siguientes conjuntos son iguales:

a) $\{x/x$ es una letra de la palabra JARRO$\}$.
b) $\{x/x$ es una letra de la palabra ARROJAR$\}$.
c) El conjunto de las letras de la palabra ARROJO.
d) El conjunto $\{a, o, j, r\}$.

7. Sea $A=\{d\}$, $B=\{c, d\}$, $C=\{a, b, c\}$, $D=\{a, b\}$, $E=\{a, b, d\}$. Halla cuáles de las siguientes expresiones son verdaderas o falsas:

a) $D \subset C$;
b) $A \not\subset B$;
c) $B \neq E$;
d) $A \not\subset E$;
e) $A \not\subset D$;
f) $A \subset C$;
g) $C \equiv B$;
h) $B \subset D$;
i) $C \not\subset E$.

8. Dibuja un diagrama lineal para los conjuntos $M=\{a, b, c\}$, $N=\{a, b\}$ y $P=\{a, c\}$.

9. Dibuja un diagrama lineal para los conjuntos A, B, C, D y E del problema 7.

10. Expresa con un diagrama de Venn que $X \equiv Y$.

11. Sean $M=\{2, 3, 4\}$, $N=\{x/x^2=4\}$, $P=\{2, 4\}$ y $Q=\{x/x$ es par$\}$. Completa las siguientes igualdades poniendo en lugar de los puntos $\subset$, $\supset$ o $n\,C$ (no comparable):

a) $M \ldots N$;
b) $M \ldots P$;
c) $N \ldots P$;
d) $M \ldots Q$;
e) $N \ldots Q$;
f) $P \ldots Q$.

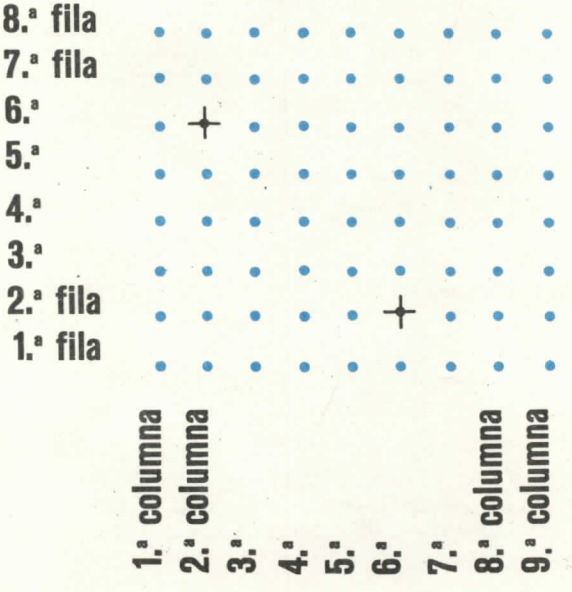
12. Sean $A=\{1, 2, \ldots, 8, 9\}$, $B=\{2, 4, 6, 8\}$, $C=\{1, 3, 5, 7, 9\}$, $D=\{3, 4, 5\}$ y $E=\{3, 5\}$. ¿Cuáles de estos conjuntos pueden ser iguales a X, si se dan los siguientes datos:

a) $X \subset D$ y $X \not\subset B$;
b) $X \subset A$ y $X \not\subset C$;
c) $X \subset C$ y $X \not\subset A$.

3

Producto de conjuntos

9. Pares ordenados.—Supongamos un batallón en formación



Los puntos representan los soldados. Se llaman *filas* a las líneas horizontales, y *columnas* a las líneas verticales. Cada soldado queda situado por la fila y la columna a que pertenece. Así, el soldado situado en la 6.ª columna y segunda fila (señalado con cruz negra) se puede representar por el símbolo (6, 2), mientras que el soldado situado en la 2.ª columna y 6.ª fila (señalado con cruz negra) se representa por (2, 6). *El primer número indica siempre la columna, y el segundo número la fila, separados ambos por una coma.*

Un "par ordenado" consta de dos elementos, por ejemplo, a y b, de los cuales uno de ellos, por ejemplo, a, se designa como primer elemento y el otro como segundo elemento.

Un par ordenado se representa por

$$(a, b)$$

Como vimos en el ejemplo del batallón en formación, el orden es fundamental, como lo es en el par ordenado (calcetines, zapatos), ya que al vestirse una persona primero se pone los calcetines y después los zapatos.

Es de notar que los componentes de un par ordenado no necesitan ser diferentes; esto es, (3, 3), (4, 4), (5, 5) y (a, a) son pares válidos. Es el caso de los soldados en formación situados en puntos cuyo fila y columna tienen el mismo número.

La "*igualdad*" de pares ordenados se define así: *Dos pares ordenados* (a, b) *y* (c, d) *son iguales,* $(a, b) = (c, d)$, *solamente si* $a = c$ y $b = d$.

EJEMPLOS. 1.° Los pares ordenados (2, 3) y (3, 2) son diferentes.

2.° Es distinto el par ordenado (2, 3) y el conjunto $\{2, 3\}$, pues en el último el orden no es esencial y en el primero sí.

10. Producto cartesiano de conjuntos.—En el caso del batallón en formación tenemos dos conjuntos: el de *filas F* y el de *columnas C*, que son

$$F = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$
$$C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

El conjunto de todos los soldados se obtendrá formando todos los pares posibles con los números indicadores de filas y los números indicadores de columnas. Para abreviar supongamos que hay sólo 3 filas y 4 columnas. El siguiente esquema nos permite formar fácilmente todos los pares de una manera sistemática.

$$1 \begin{cases} \nearrow 1 \longrightarrow (1, 1) \\ \rightarrow 2 \longrightarrow (1, 2) \\ \rightarrow 3 \longrightarrow (1, 3) \\ \searrow 4 \longrightarrow (1, 4) \end{cases} \qquad 2 \begin{cases} \nearrow 1 \longrightarrow (2, 1) \\ \rightarrow 2 \longrightarrow (2, 2) \\ \rightarrow 3 \longrightarrow (2, 3) \\ \searrow 4 \longrightarrow (2, 4) \end{cases} \qquad 3 \begin{cases} \nearrow 1 \longrightarrow (3, 1) \\ \rightarrow 2 \longrightarrow (3, 2) \\ \rightarrow 3 \longrightarrow (3, 3) \\ \searrow 4 \longrightarrow (3, 4) \end{cases}$$

De esta manera se han formado 12 pares ordenados donde todos los componentes de los pares ordenados son elementos de F y C.

Esta totalidad de pares ordenados se llama "*conjunto producto cartesiano de F y C*" y se representa por $F \times C$. Fíjate bien en que los elementos de F y C son números únicos mientras que los elementos de $F \times C$ son pares ordenados.

Se tiene,

$$F \times C = \{(1,1),\ (1,2),\ (1,3),\ (1,4),\ (2,1),\ (2,2),\ (2,3),\ (2,4),\ (3,1),\ (3,2),\ (3\,3),\ (3,4)\}.$$

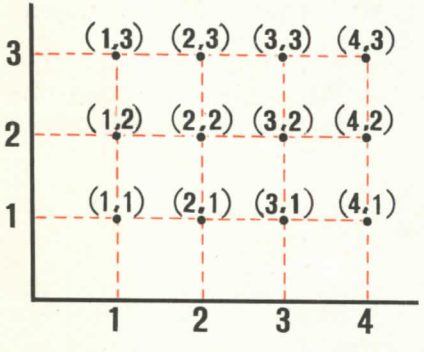
Dados dos conjuntos A y B, el conjunto producto de A y B consta de todos los pares ordenados (a, b) *donde* $a \in A$ *y* $b \in B$. Este conjunto producto se designa por

$$A \times B$$

de modo que

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in ,A,\ b \in B\}$$

La interpretación gráfica del producto $F \times C$ anterior se hace trazando dos rectas perpendiculares y tomando en ellas escalas apropiadas.



Los elementos del conjunto producto vienen representados por los nudos de la red que se obtiene trazando, por cada punto de división de una recta, paralelas a la otra recta.

EJEMPLOS. 1.º Sea

$$A = \{1, 2, 3\} \text{ y } B = \{a, b\}.$$

El conjunto producto es

$$A \times B = \{(1, a),\ (1, b),\ (2, a),\ (2, b),\ (3, a),\ (3, b)\}$$

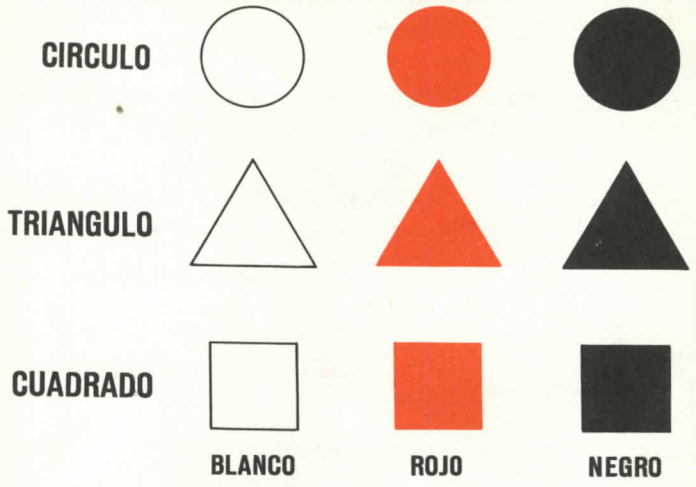
2.º Sea $D = \{s, t\}$. Luego

$$D \times D = \{(s, s),\ (s, t),\ (t, s),\ (t, t)\}.$$

3.º El producto de dos conjuntos $A \times B$, ¿es conmutativo, o sea, $A \times B \equiv B \times A$?

No, porque los pares de $A \times B$ son distintos de los de $B \times A$.

4.º Si $A=\{$círculo, triángulo, cuadrado$\}$ y $B=\{$blanco, rojo, negro$\}$, dibuja el conjunto producto, como en la figura



5.º *Un niño tiene 3 chaquetas y 2 pantalones. ¿Cuántos trajes diferentes se puede poner?*

Llamemos c, c' y c'' las chaquetas y p y p' los pantalones. Ya que cada pantalón puede ponerse con cualquiera de las chaquetas, formamos el siguiente cuadro:

	c	c'	c''
$p \rightarrow$	(c, p)	(c', p)	(c'', p)
$p' \rightarrow$	(c, p')	(c', p')	(c'', p')

Cada traje es un *par ordenado* formado por una chaqueta y un pantalón. El conjunto de trajes es el **producto cartesiano** del conjunto de chaquetas por el conjunto de pantalones.

EJERCICIOS

1. El conjunto $A=\{$Luis, José, Pedro, Juan$\}$ dispone del conjunto de bicicletas $B=\{$Roja, Verde, Azul$\}$. Forma todos los pares ordenados posibles y el conjunto producto de A y B.

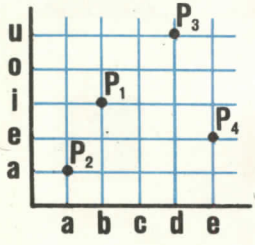
2. Si $A=\{1, 2, 3\}$ y $B=\{a, b\}$ forma: a) $A \times B$, b) $B \times A$, c) $A \times A$, d) $B \times B$.

3. Si $A=\{3,4,5\}$ y $B=\{1,2,3,4\}$, describe por extensión cada uno de los conjuntos siguientes:

a) $A\times A$;
b) $A\times B$;
c) $B\times B$;
d) $B\times A$;
e) $(A\times A)\cap(B\times B)$;
f) $(A\times A)\cup(B\times B)$;
g) $(A\times B)\cup(B\times A)$;
i) $(A\times B)\cap(B\times A)$.

4. Sea C un conjunto con 6 elementos y B un conjunto con 10 elementos. ¿Cuántos elementos hay contenidos en cada uno de los siguientes conjuntos?

a) $C\times C$;
b) $B\times B$;
c) $B\times C$;
d) $\{(x,y)\mid x\in B,\ y\in B,\ x\neq y\}$.



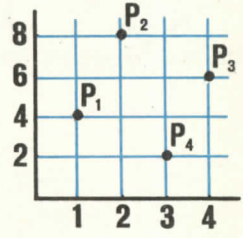
5. Halla los pares ordenados correspondientes a los puntos P_1, P_2, P_3 y P_4 que aparecen en el diagrama coordenado de $A\times B$. Aquí,

$$A=\{a,b,c,d,e\}\ \text{y}\ B=\{a,e,i,o,u\}$$

6. Sean $A=\{a,b\}$, $B=\{2,3\}$ y $C=\{3,4\}$. Halla:

a) $A\times(B\cup C)$;
b) $(A\times B)\cup(A\times C)$;
c) $A\times(B\cap C)$;
d) $(A\times B)\cap(A\times C)$.

7. Halla los pares ordenados correspondientes a los puntos P_1, P_2, P_3 y P_4 que aparecen en el diagrama coordenado de $\{1,2,3,4\}\times\{2,4,6,8\}$.



8. Sea $W=\{\text{Marcos, Emilio, Pablo}\}$ y sea $V=\{\text{Emilio, David}\}$. Halla:

1) $W\times V$, 2) $V\times W$, 3) $V\times V$.

9. En una clase hay 5 filas de mesas de 7 mesas cada fila. Si el profesor no conoce todavía a los alumnos por su nombre, ¿cómo podría llamarles, sirviéndose de la fila y columna que ocupa? ¿Qué representa cada par ordenado del conjunto producto $F\times C$, siendo $F=\{1,2,3,4,5\}$ y $C=\{1,2,3,4,5,6,7\}$?

10. Halla el conjunto producto $F\times C$ del problema anterior.

11. Explica cómo puedes definir el conjunto de los días de este mes como producto de los conjuntos $\{L, M, X, J, V, S, D\}$ y $\{1.^a, 2.^a, 3.^a, 4.^a, 5.^a\}$. ¿Qué elementos, o pares ordenados, tienes que desechar de ese producto?

12. Haz el producto de los conjuntos $\{m, n, p, q\}$ y {versalita, negrita, cursiva}. Represéntalo gráficamente.

13. Dado el conjunto $X=\{a, b, c, d\}$, halla el conjunto producto $X\times X$ y represéntalo gráficamente.

14. En un bar se ofrecen 5 clases de sandwichs y tres clases de frutas. ¿Cuántos menús distintos podéis escoger?

15. Si $A=\{a, b, c\}$ y $B=\{x, y, z\}$, forma el conjunto producto $A \times B$.

16 Siendo A el conjunto de los pisos de una casa, $A=\{1.^{o}, 2.^{o}, 3.^{o}, 4.^{o}\}$, y $B=\{$derecha, izquierda$\}$, determina el conjunto de viviendas de dicha casa.

17. Representa gráficamente el producto de los conjuntos $M=\{1.^{o}, 2.^{o}, 3.^{o}, 4.^{o}, 5.^{o}\}$ y $N=\{A, B, C, D\}$.

18. En una familia hay tres hijas y tres hijos. La madre dice que las hijas para salir de paseo deben ir acompañadas de uno de sus hermanos. ¿Cuántas parejas pueden formarse? Si las hijas son: $A=\{$María, Inés, Luisa$\}$ y los hijos $B=\{$José, Juan, Pedro$\}$, forma el conjunto $A \times B$.

19. Sea C un conjunto con 7 elementos y B un conjunto con 4 elementos. ¿Cuántos elementos están contenidos en cada uno de los siguientes conjuntos:

a) $C \times C$; b) $B \times B$; c) $B \times C$; d) $B \times B \times B$?

4

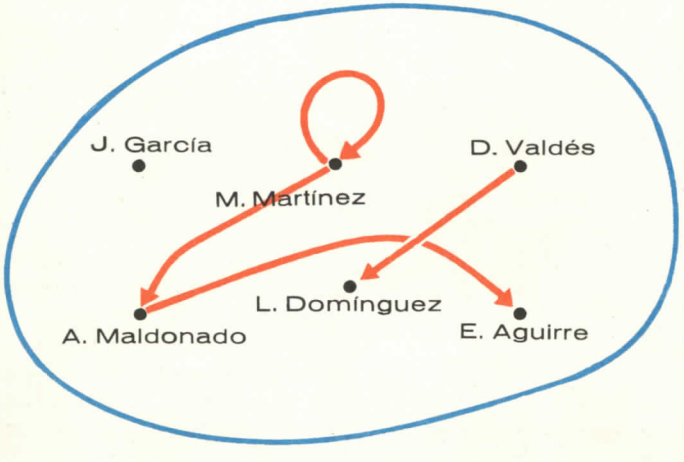
Relaciones binarias

11. Definición.—Seis niños están jugando. Se llaman Juanito García, Manolo Martínez, Daniel Valdés, Alicia Maldonado, Luisa Domínguez y Enriqueta Aguirre.

El juego consiste en que cada uno debe dar una canica a aquellos niños del grupo cuyo apellido comienza por la misma letra que el nombre de él. Así:

Alicia M. da una canica a E. Aguirre; Daniel V. da una canica a L. Domínguez, etc.

En lugar de completar esta lista, para hacer el juego más intuitivo podemos representar cada niño por un punto, y cada vez que uno debe dar una bola a otro, dibujamos una flecha que va del primero al segundo. Algún niño, como Manolo Martínez, debe darse una bola a sí mismo. Esto se representa mediante un lazo o flecha que sale del punto y vuelve al mismo. Así resulta el siguiente **grafo:**



Este grafo representa una **relación** en el conjunto de niños considerado.

Siempre que una flecha sale de a y llega a b, diremos que el par ordenado (a, b) es un **elemento de la relación.**

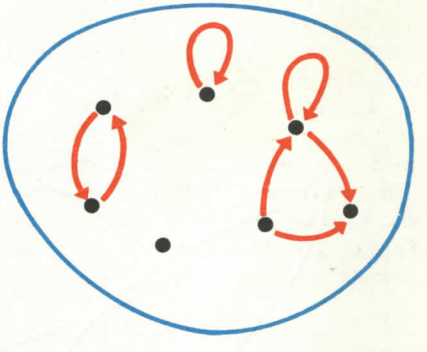
Relación binaria es un conjunto de pares ordenados.

EJEMPLOS. 1.º Detalla el conjunto de pares de la relación precedente.

Llamando a, b, c, d, e y f a los seis niños en el mismo orden en que se han dado al comenzar, son los siguientes pares ordenados: (b, b), (b, d), (c, e) y (d, f).

También suele escribirse $b\,R\,b$, $b\,R\,d$, $c\,R\,e$, $d\,R\,f$.

En general, en una relación cualquiera, $a\,\mathbf{R}\,b$ significa que a está relacionado con b en dicha relación, o sea, que hay una flecha de a hacia b.

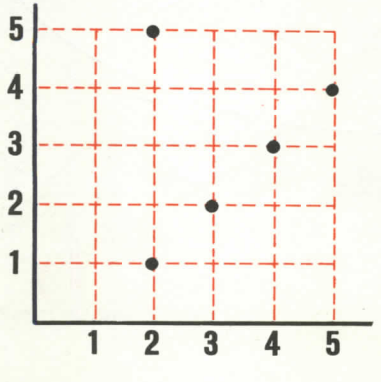


2.º Los siete niños indicados en la figura juegan al juego de las canicas indicado anteriormente, con los resultados que se expresan. Inventa tú nombres y apellidos de los siete niños, de modo que cumplan esta relación.

3.º Detalla el conjunto de los pares de la relación precedente de las dos formas.

4.º Sea en el conjunto $C=\{1, 2, 3, 4, 5\}$ la relación definida por los pares $(2, 1)$, $(2, 5)$, $(3, 2)$, $(4, 3)$, $(5, 4)$, a cuyo conjunto lo llamamos A. Observa que este conjunto A es un subconjunto del conjunto producto $C \times C$, o sea

$$A \subset C \times C.$$



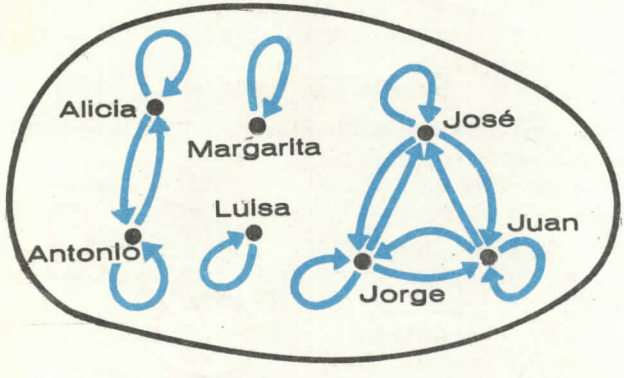
Representa gráficamente dicho conjunto A, como se indica en el grafo adjunto.

El conjunto producto $C \times C$ viene representado por todos los nudos de la red; el conjunto A, solamente por los 5 puntos señalados.

Dar una relación en un conjunto C es dar un subconjunto A del conjunto producto $C \times C$.

12. Algunas propiedades de las relaciones.—Siete niños: Antonio, Alicia, Margarita, Luisa, José, Juan y Jorge, están jugando. El juego consiste en que cada uno debe dar una canica a aquellos niños del grupo cuyo nombre comienza con la misma letra que el nombre de él.

Dibuja el grafo de esta relación, así:



Observa que de todo punto sale una flecha que vuelve al mismo, puesto que cada niño debe darse una canica a sí mismo.

Se dice que esta relación es **reflexiva.**

Una relación tiene la propiedad reflexiva cuando su grafo presenta un bucle o lazo en todos y cada uno de sus puntos.

Observa también que cada vez que hay una flecha de un punto a otro, hay una segunda flecha que va del segundo al primero; efectivamente, si Alicia debe darle una canica a Antonio, también Antonio debe darle otra a Alicia.

Se dice que esta relación es **simétrica.**

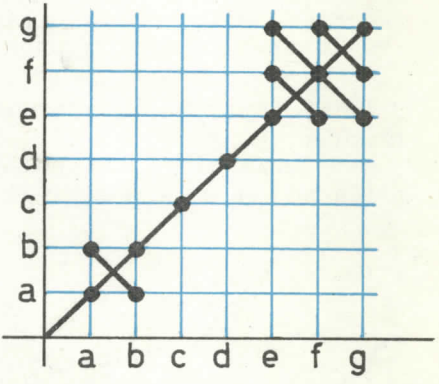
Una relación es simétrica si cada vez que su grafo contiene una flecha que va de a hacia b hay otra que va de b hacia a.

Observa una nueva propiedad: cada vez que hay una flecha que va de a hacia b, y otra de b hacia c, hay una tercera que va de a hacia c. Efectivamente, si José da una canica a Juan, y Juan la da a Jorge, es porque el nombre de los tres comienza en la mis-

ma letra. Luego también José ha de dar una canica a Jorge. Se dice que esta relación en el conjunto de niños, que podemos expresar por "*empezar los nombres por la misma letra*" es **transitiva.**

Una relación es transitiva si su grafo satisface la condición de que si una flecha va de *a* hacia *b*, y otra va de *b* hacia *c*, entonces hay una flecha que va de *a* hacia *c*.

Vamos a representar en diagrama cartesiano esta relación, como lo indica la figura.



La propiedad *reflexiva* se representa porque aparecen todos los nudos de la *bisectriz* o *diagonal* del cuadrante.

La propiedad *simétrica* se indica porque todo punto de la relación tiene su *simétrico* respecto a dicha bisectriz. De ahí el nombre dado a dicha propiedad.

EJEMPLOS. 1.º En un conjunto de niños vamos a considerar la relación "*tener los mismos padres que*". Dos niños están ligados por esta relación si son hermanos, y no están ligados en caso contrario.

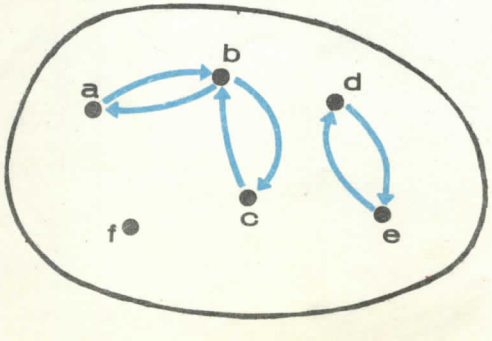
¿Es reflexiva esta relación, o sea, tiene cada niño los mismos padres que él mismo? ¿Es simétrica y transitiva?

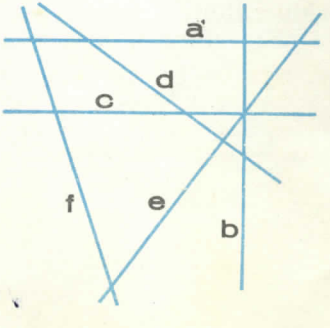
2.º En el conjunto de las rectas del plano definimos la relación de perpendicularidad. Una recta ***a*** es perpendicular a otra ***b*** si forma con ella ángulo recto.

¿Es reflexiva esta relación, o sea, una recta ***a*** es perpendicular a ella misma? ¿Es simétrica? ¿Es transitiva?

Considera las rectas ***a***, ***b***, ***c***, ***d***, ***e*** y ***f***. Traza el grafo de dicha relación de perpendicularidad entre ellas.

Es el siguiente:





Observa que cada vez que hay una flecha de un punto a otro, hay una segunda flecha que va del segundo al primero; efectivamente, si ***a*** es perpendicular a ***b***, también es ***b*** perpendicular a ***a***.

Se dice que la relación de perpendicularidad entre rectas es **simétrica.**

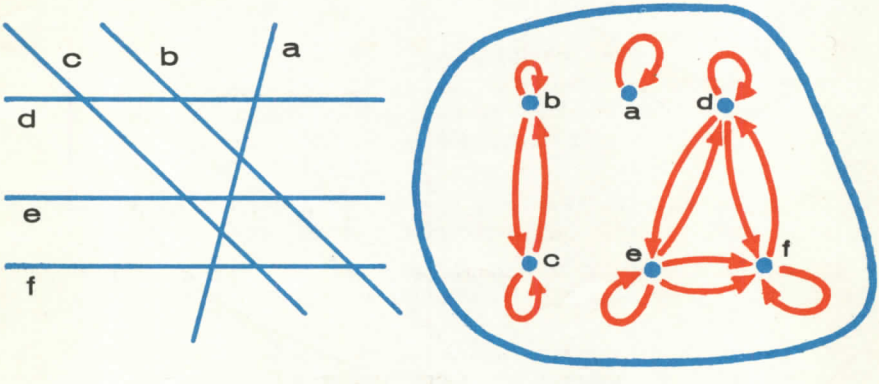
3.° En el ejemplo anterior detalla los pares ordenados que definen la relación de perpendicularidad en el conjunto de las rectas ***a***, ***b***, ***c***, ***d***, ***e***, ***f***.

4.° En un conjunto de niños definimos la relación de vecindad. Dos niños serán vecinos si habitan en la misma casa.

¿Es simétrica esta relación? ¿Es reflexiva? ¿Es transitiva?

5.° La relación "*ama a*" es simétrica en el conjunto {Romeo, Julieta}. Desgraciadamente no lo es en el conjunto de toda la humanidad.

6.° En un plano trazamos un conjunto de rectas ***a***, ***b***, ***c***, ***d***, ***e*** y ***f***, definiendo en él la relación de **paralelismo:** diremos que dos rectas



son paralelas cuando el ángulo que forman es nulo. Así resulta el grafo adjunto.

¿Es reflexiva esta relación? ¿Es simétrica? ¿Es transitiva?

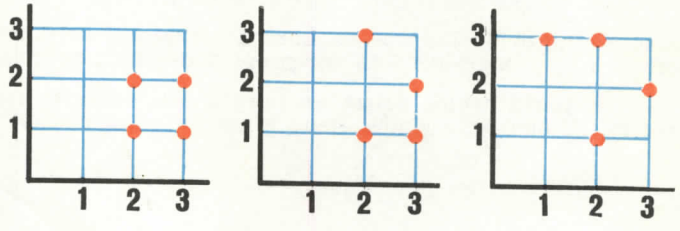
EJERCICIOS

1. El par ordenado (David, Salomón), ¿satisface la relación "*x fue el padre de y*"? ¿Y el par (Benjamín, Jacob)?

2. Los pares (3, 4), (2, 5) y (6, 8) ¿satisfacen la relación "*x es menor que y*"? ¿Y los pares (4, 2), (9, 6) y (5, 1)?

3. Señala cuáles de las siguientes expresiones son verdaderas y cuáles son falsas, si R representa la relación "*x es mayor que y*": a) $3\,R\,6$; b) $9\,R\,5$; c) $7\,R\,4$; d) $2\,R\,5$.

4. Escribe los pares ordenados que satisfacen a cada una de las relaciones expresadas en los siguientes gráficos y definidas en el conjunto $U=\{1, 2, 3\}$:

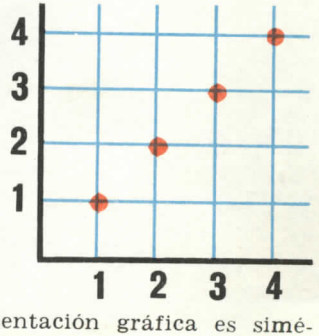


a) *b)* *c)*

5. Sea la relación $R=\{(1, 4), (5, 3), (2, 5), (4, 1), (6, 2)\}$. ¿En qué conjunto está definida dicha relación?

6. ¿Son reflexivas las relaciones "*es amigo de*", "*es tan alto como*"?

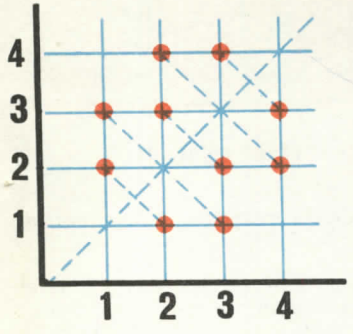
7. Siendo $A=\{1, 2, 3, 4\}$, la relación "*es igual a*", o sea "=" extrae de $A \times A$ los pares ordenados (1, 1), (2, 2), (3, 3) y (4, 4). ¿Es reflexiva dicha relación "="? Traza su gráfica, y observa que todos los puntos de la bisectriz del cuadrante pertenecen a la misma.



8. ¿Son simétricas las relaciones "*es amigo de*", "*está casado con*", "*tiene igual edad que*", "*es primo de*", "*es padre de*" y "*es paralelo a*"?

9. En el conjunto $A=\{1, 2, 3, 4\}$ se define la relación $R=\{(1, 3), (4, 2), (2, 4), (2, 3), (3, 2), (1, 2), (2, 1), (3, 1), (3, 4), (4, 3)\}$. ¿Es simétrica esta relación?

Traza su gráfica y observa que esta representación gráfica es simétrica respecto a la bisectriz del cuadrante.



10. ¿Son transitivas las relaciones "*es amigo de*", "*es menor que*" y "*es hermano de*"?

11. En el conjunto $A=\{1, 2, 3, 4\}$ se define la relación $R=\{(1, 1), (2, 4), (3, 3), (4, 1)$ y $(4, 4)\}$. ¿Es simétrica esta relación? ¿Es reflexiva? ¿Es transitiva?

12. Se sabe que los planetas del sistema solar, excepto la Tierra, tienen nombres de divinidades romanas. También algunos días de la semana derivan sus nombres de aquellos dioses: martes de Marte, miércoles de Mercurio, jueves de Júpiter, viernes de Venus y sábado de Saturno. Establece una relación R entre el conjunto P de planetas y el conjunto D de días de la semana, atendiendo al origen común de sus nombres. Basta que escribas los pares "Marte R martes", etc.

13. En el conjunto de tus regletas establece la relación "*tener igual color que*". ¿Qué propiedades tiene dicha relación?

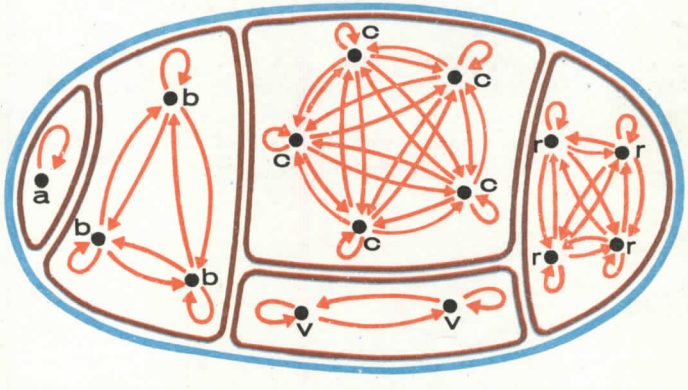
14. En el conjunto de los ríos de Europa estableces la relación "*desembocar en el mismo mar que*". Di las propiedades de esta relación.

15. En el conjunto de los países de Europa estableces la relación de "*ser limítrofes*". Di qué propiedades tiene y haz su representación gráfica.

5

Relaciones de equivalencia

13. Definición.—Toma un puñado de regletas y establece entre ellas la relación "*tener el mismo color que*". Traza el grafo correspondiente, por ejemplo el siguiente:



Tienes, por tanto, 1 regleta amarilla, 3 regletas blancas, 5 coloradas, 2 verdes y 4 rosas. ¿Qué propiedades tiene esta relación?

Según se puede observar, tiene las tres propiedades: **reflexiva, simétrica** y **transitiva.**

Toda relación que tenga estas tres propiedades se llama **relación de equivalencia.**

Como ves, esta relación hace aparecer una partición del conjunto de regletas en **clases,** o sea, una **clasificación.** Cada clase contiene todas las regletas del mismo color.

Dar en un conjunto una relación de equivalencia es lo mismo que hacer una clasificación del mismo.

Siempre que en un conjunto se ha establecido una relación de equivalencia R, en lugar de escribir $a\,R\,b$, para indicar que los

elementos a y b están relacionados en la misma, se escribe simplemente $a=b$: sustituimos la letra R, de una relación general, por el signo $=$, propio de las relaciones de equivalencia.

EJEMPLOS. 1.° ¿Cuáles de las siguientes relaciones son de equivalencia: "*tener el mismo nombre*" en un conjunto de niños; "*desembocar en el mismo mar*" en el conjunto de ríos de una nación; la relación de inclusión entre conjuntos; "*ser hermano de*" en un conjunto de niños; "*ser hijo de*" en un conjunto de personas?

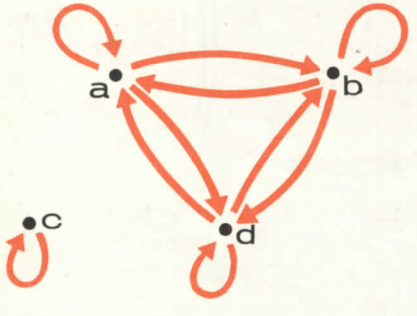
¿Cuál de las tres propiedades no cumplen aquellas de las citadas que no son relaciones de equivalencia?

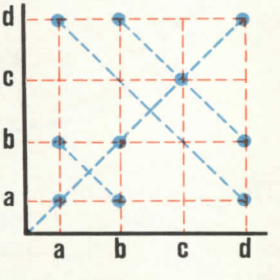
2.° En el conjunto $U=\{a, b, c, d, e, f\}$ se da la siguiente relación:

$$a\,R\,a,\ b\,R\,b,\ b\,R\,c,\ c\,R\,b,\ c\,R\,c,\ d\,R\,d,\ d\,R\,e,$$
$$e\,R\,d,\ e\,R\,e,\ e\,R\,f,\ f\,R\,e,\ f\,R\,f,\ d\,R\,f,\ f\,R\,d$$

Traza el grafo correspondiente. ¿Es ésa una relación de equivalencia? ¿Cómo escribirías los anteriores pares ordenados?

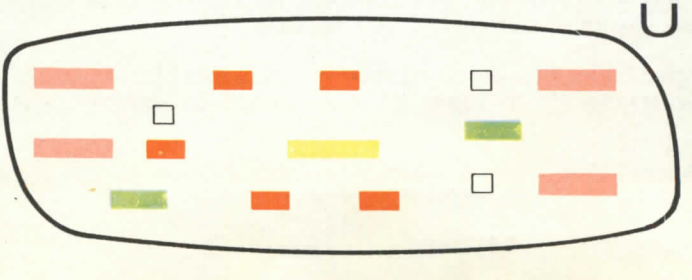
3.° Entre cuatro personas, que designamos por las letras a, b, c y d, consideramos la relación de **vecindad,** o sea, la de habitar en la misma casa. Resultan los siguientes grafos:



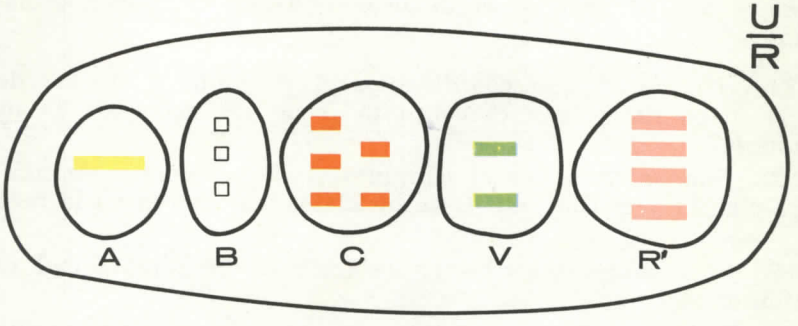


Explícalos: ¿Se trata de una relación de equivalencia? Detalla los pares ordenados que componen la relación, empleando el signo $=$.

14. Conjunto cociente.—Volvamos al puñado de regletas de que hablamos en el número anterior. Llamemos U dicho conjunto.



Una vez clasificadas por su color, o sea, en virtud de la relación R "*tiene el mismo color que*" se obtienen como clases los subconjuntos A, B, C, V y R'.



Si consideramos ahora el conjunto $\{A, B, C, V, R'\}$, cuyos elementos son las clases, a dicho conjunto le llamamos **conjunto cociente** del conjunto U respecto a la relación R, y lo representamos por $\frac{U}{R}$, o sea

$$\frac{U}{R}=\{A, B, C, V, R'\}.$$

O sea, por definición, *el conjunto de clases de equivalencia determinado en U por la relación R se llama conjunto cociente de U por R.*

EJEMPLOS. 1.° En el conjunto H de habitantes de una ciudad establecemos la relación R de vecindad. ¿Cuál es el conjunto cociente H/R?

Es el conjunto de casas de la ciudad.

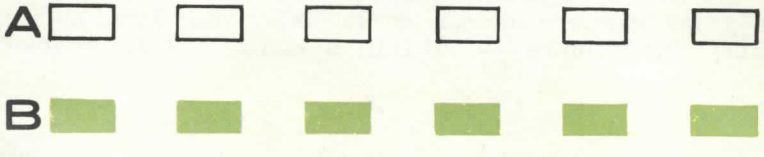
2.° En el conjunto N de niños y jóvenes solteros de una ciudad consideramos la relación R de "*ser hermanos*". ¿Cuál es el conjunto cociente N/R?

Es el conjunto de familias de la ciudad.

3.° En el conjunto U de rectas de un plano definimos la relación R de paralelismo. Todas las rectas paralelas entre sí decimos que tienen la misma **dirección.** ¿Qué es el conjunto cociente U/R?

Es el conjunto de las direcciones del plano.

15. La relación de coordinabilidad de conjuntos.—Toma dos conjuntos, uno A de papelitos blancos, y otro B de papelitos de color. Forma pares que tengan un papelito blanco y un papelito de color.



Si al fin no sobra ningún papelito blanco ni ningún papelito verde, decimos que los dos conjuntos A y B son **coordinables:** a cada papelito blanco le corresponde uno, y uno sólo, papelito verde, y a cada papelito verde le corresponde un papelito blanco, y uno sólo.

EJEMPLOS. 1.° ¿Son coordinables el conjunto A de los dedos de la mano derecha y el conjunto B de los dedos de la mano izquierda?

2.° ¿Son coordinables el conjunto A de corredores de una carrera ciclista y el conjunto B de bicicletas que corren en la misma?

16. El número natural.—La relación de coordinabilidad entre conjuntos es:

1.° *Reflexiva.* Todo conjunto es coordinable consigo mismo.

2.° *Simétrica.* Si el conjunto A es coordinable con el conjunto B, entonces B es coordinable con A.

3.° *Transitiva.* Si el conjunto A de alumnos de una clase es coordinable con el conjunto B de asientos de la misma, y éste es coordinable con el conjunto C de mesas, entonces A es coordinable con C.

Por tanto, la relación R de coordinabilidad es una relación de equivalencia, que nos clasifica los conjuntos en clases, cada una de las cuales comprende todos los conjuntos que son coordinables entre sí.

Cada una de estas clases define un **número natural:** todos los conjuntos coordinables entre sí tienen algún parecido, y éste lo expresamos diciendo que tienen el mismo **número** de elementos.

El conjunto cociente U/R, o conjunto de estas clases, es el conjunto N de los números naturales

$$N=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots\}$$

Número natural es la clase de los conjuntos coordinables entre sí.

EJEMPLOS. 1.° El número, ¿es concreto o abstracto?

Es un concepto abstracto que nuestra mente elabora al tratar de comparar los conjuntos que a cada paso encontramos en la vida corriente y al tratar de clasificarlos.

El perrito ve, lo mismo que nosotros, las cuatro patas de una mesa y las cuatro ventanas de la habitación. Pero no observa ninguna relación entre los dos conjuntos. Nosotros en cambio nota-

mos que son coordinables, que se parecen en algo, a lo que llamamos **número** de elementos. Este existe sólo en nuestra mente, no tiene realidad física y material: esto es lo que llamamos *abstracto*.

2.° ¿Es lo mismo el concepto de número que el símbolo con que se le representa? ¿Cómo se representa el número *siete* en cifras arábigas? ¿Y en cifras romanas?

No confundas, por tanto, el concepto de número con el símbolo que lo representa: éste ha variado a lo largo de la Historia, pero aquél es siempre el mismo desde el origen de la Humanidad.

3.° El número de elementos de un conjunto A se llama **cardinal de A,** y se representa por card (A).

Si $B=\{a, b, c, d, e, f, g\}$, halla cuál es card (B).

4.° La serie de números naturales, que conoces desde pequeño, 1, 2, 3, 4, ..., ¿tiene último término?

Decimos que es *ilimitada*: a todo número le sigue otro.

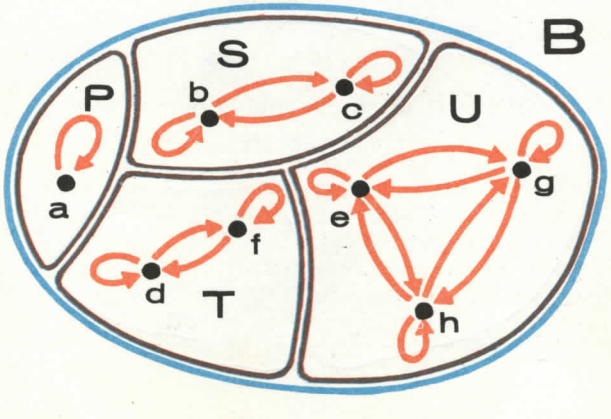
EJERCICIOS

1. Juanito clasifica sus sellos por naciones. ¿Qué clase de relación ha establecido en su colección de sellos? ¿A qué es igual en este caso el conjunto cociente?

2. ¿Cuáles de las siguientes relaciones son de equivalencia: la de "*ser limítrofes*" entre las naciones de América; la de "*tener la misma nota en Matemáticas*" entre los alumnos de tu clase; la de "*estar delante de*" en un conjunto de alumnos, en formación, que hacen gimnasia? Di qué propiedades no cumplen las relaciones anteriores que no son de equivalencia.

3. La relación de *identidad de conjuntos* ¿es una relación de equivalencia? ¿Por qué?

4. En un conjunto B definimos una relación R expresada por el siguiente grafo:

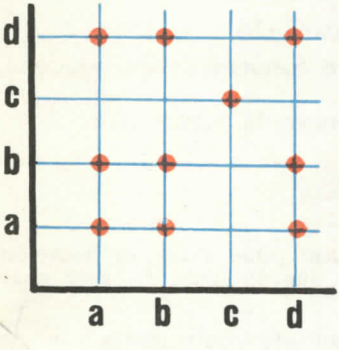


Detalla los pares ordenados de dicha relación. ¿Se trata de una relación de equivalencia? Explica cuál es el conjunto cociente B/R.

5. En el conjunto de alumnos de tu Colegio, ¿cuál es la partición definida por la relación "*estar en el mismo curso*"? ¿Cuál es el conjunto cociente?

6. En el conjunto de alumnos de tu clase, ¿cuál es la clasificación originada por la relación "*estar sentado en la misma fila de mesas*"?

7. En el conjunto de las rectas del plano consideramos la relación de perpendicularidad. ¿Es ésta una relación de equivalencia? ¿Qué propiedades de la misma no cumple?



8. La relación "*ama a*" ¿es de equivalencia? ¿Qué propiedades de la misma cumple y cuáles no?

9. Sea $M=\{a, b, c, d\}$, y sea una relación R en M dada por el conjunto de puntos representados en el diagrama de la figura.

a) Traza el grafo correspondiente, y di si se trata de una relación de equivalencia.

b) Explica cuál es el conjunto cociente M/R y de cuántas clases consta.

c) Di todos los elementos de M que están relacionados con b.

d) Di si son verdaderas o falsas las expresiones siguientes: $a\,R\,c$; $c\,R\,b$; $d\,R\,a$; $d \not R\, c$; $d \not R\, b$.

10. Estudia la relación de "*paisanaje*", o sea, ser del mismo pueblo o ciudad. ¿Es una relación de equivalencia?

11. ¿Son coordinables el conjunto de los días de la semana y el conjunto de las notas de la escala musical?

12. ¿Es válida la igualdad

$$(7+4)-5=7+(4-5)$$

en el conjunto N de los números naturales?

13. Efectúa la operación

$$7+\{5+[6+(3-2)]\}$$

y di por qué se obtiene el mismo resultado que al efectuar la operación

$$\{[(7+5)+6]+3\}-2$$

6

Correspondencias entre conjuntos (funciones)

17. Definición.—Hasta ahora hemos estudiado las relaciones binarias entre los elementos de un conjunto. Ahora vamos a considerar relaciones entre dos conjuntos distintos.

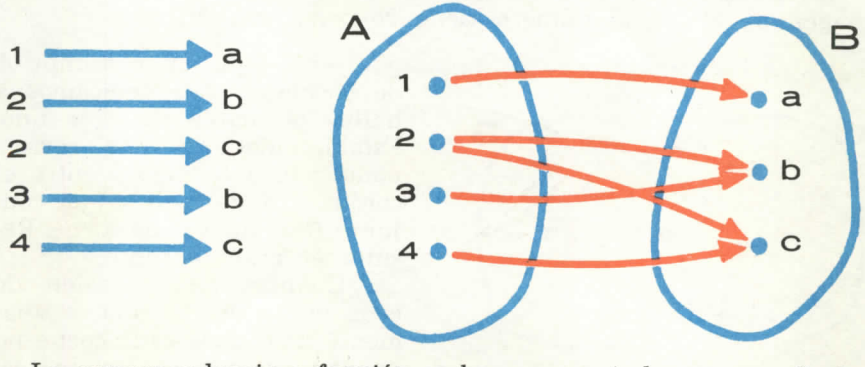
Sean los conjuntos $A=\{1, 2, 3, 4\}$ y $B=\{a, b, c\}$. Determina el conjunto producto $A \times B$:

$$A \times B = \{(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c), (3, a), (3, b), (3, c), (4, a), (4, b), (4, c)\}$$

Considera un subconjunto $C \subset A \times B$, por ejemplo, éste:

$$C = \{(1, a), (2, b), (2, c), (3, b), (4, c)\}$$

Decimos que el subconjunto C define una **correspondencia** o **función** entre los conjuntos A y B, del siguiente modo: a cada elemento de A se le asigna aquel o aquellos elementos de B que forman par con él en uno de los elementos de C. Así:



La correspondencia o función se ha representado por una flecha, pero también es corriente representarla por letras minúsculas, como *f*, *g*, *h*, ..., etc.

Si representamos por f la función anterior, esta letra designa, por tanto, un conjunto de pares. Si consideramos el par $(1, a)$, decimos que a es el correspondiente al 1 en la función f, y lo representaremos por $f(1)$, o sea

$$a = f(1).$$

También decimos que $f(1)$ es la **imagen** en B del elemento 1 de A. Del mismo modo

$$b = f(2); \quad c = f(2); \quad b = f(3); \quad c = f(4).$$

A se llama conjunto **original,** y B conjunto **imagen.**

EJEMPLOS. 1.° Sea la función f definida por $a \longrightarrow a+5$, en que a cada número natural a le hacemos corresponder el $a+5$. Halla $f(2)$, $f(10)$ y $f(30)$.

Se tiene

$$f(2) = 2+5 = 7$$
$$f(10) = 10+5 = 15$$
$$f(30) = 30+5 = 35.$$

2.° En el ejemplo anterior, ¿cuál es la imagen de cero por la función f?

La imagen del número 0 es $0+5=5$.

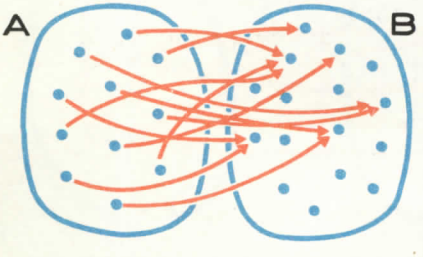
3.° En el ejemplo anterior se sabe que $f(x)=47$. ¿Cuánto vale x?

Será

$$x = 47-5 = 42.$$

4.° Designa por g la función "*tiene como doble*". ¿Cuál es la imagen de 8? ¿Qué número tiene 26 como imagen?

18. Función uniforme o aplicación.—He aquí un conjunto A de coches, y nos dedicamos a hallar la marca de cada uno. Establecemos así una correspondencia o función f entre el conjunto A de coches y el conjunto B de marcas de coche. Resulta el grafo adjunto.



¿Cuántas flechas salen de cada punto de A? Una, y solamente una, pues cada coche no puede tener más que una marca.

En cambio, hay en B puntos que reciben varias flechas y otros que no reciben ninguna. Interpreta este resultado.

En este caso *a cada elemento de A le corresponde uno, y sólo uno, en B*: se dice que la función f es **uniforme,** y también que es una **aplicación** de A en B. La correspondencia se llama **unívoca.**

EJEMPLOS. 1.º En un conjunto de niños, a cada uno le hacemos corresponder su padre. ¿Es una aplicación la correspondencia entre el conjunto A de niños y el conjunto B de sus padres?

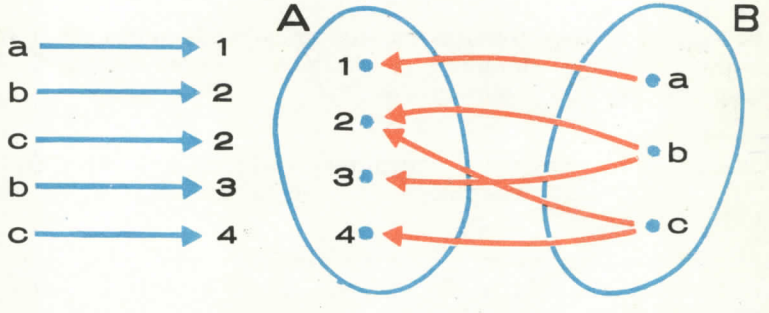
2.º La función f "*estar situada en tal país*" está definida para cualquier ciudad. ¿Es uniforme esta función? Halla:

f(Barcelona)=..., f(Florencia), f(París), f(Montevideo), f(Liverpool), f(San Francisco), f(Lima), f(Málaga) y f(Bonn).

3.º Sea A={nombres de una guía de teléfonos} y B={números de las páginas de la guía}. Si a cada nombre se asigna el número de la página correspondiente en que está escrito, ¿es ésta una aplicación o función uniforme?

19. Función inversa.—Volvamos al ejemplo del número 17, o sea, a la función f definida por el subconjunto $C \subset A \times B$, siendo A={1, 2, 3, 4} y B={a, b, c}.

Hagamos ahora corresponder a cada elemento de B el elemento o elementos de A que forman par con él en el subconjunto C, o sea



Esta función se representa por f^{-1}, y se llama **función inversa,** de la f.

Podemos escribir

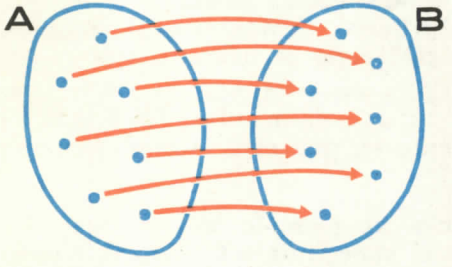
$$f^{-1}(a)=1; \quad f^{-1}(b)=2; \quad f^{-1}(c)=2;$$
$$f^{-1}(b)=3; \quad f^{-1}(c)=4.$$

EJEMPLOS. 1.º La función anterior f^{-1}, ¿es uniforme, o sea, se trata de una aplicación?

2.º Si llamamos f la función del número 18 que relaciona un conjunto A de coches con el conjunto B de sus marcas, ¿cuál es la función inversa f^{-1}? ¿Es uniforme dicha función?

3.º Si llamamos f la función que a cada número natural a le hace corresponder el número $a+4$, ¿cómo es la función inversa f^{-1}? ¿Qué número hace corresponder esta última función al número natural x?

20. Correspondencia biunívoca o biyección.—Sea A un conjunto de países y B el conjunto de sus capitales. A cada país hagamos corresponder su capital.



Esta función f es uniforme, pues a cada país le corresponde una sola capital. Su función inversa f^{-1} también es uniforme, pues cada capital pertenece a un solo país.

De cada punto de A sale una sola flecha, y a cada punto de B llega una flecha, y solamente una.

Los dos conjuntos A y B se llaman **coordinables** o **equivalentes.** La correspondencia en este caso se llama **biunívoca,** o también, simplemente, **biyección.**

Biyección es una función en que a cada elemento de *A* le corresponde un solo elemento de *B*, y a cada elemento de *B* le corresponde un solo elemento de *A*.

EJEMPLOS. 1.º Entre los conjuntos $A=\{1, 3, 5, 7, 9\}$ y $B=\{2, 4, 6, 8, 10\}$ ¿se puede establecer una biyección? Hazlo, y traza el grafo correspondiente.

2.º ¿Son equivalentes o coordinables los conjuntos $A=\{$Juan, Pedro, Luis$\}$ y $B=\{$María, Inés$\}$? ¿Se puede establecer entre ellos una biyección?

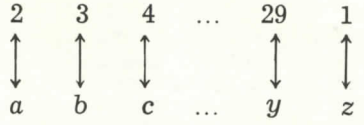
3.º Establece una biyección entre el conjunto $A=\{1, 2, 3, \ldots, 28, 29\}$ y el conjunto $B=\{a, b, c, ch, \ldots, y, z\}$.

Por ejemplo, ésta:

1	2	3	4	...	28	29
↕	↕	↕	↕		↕	↕
a	b	c	ch	...	y	z

Debe observarse que hay otras muchas maneras de establecer

la correspondencia biunívoca. Por ejemplo,

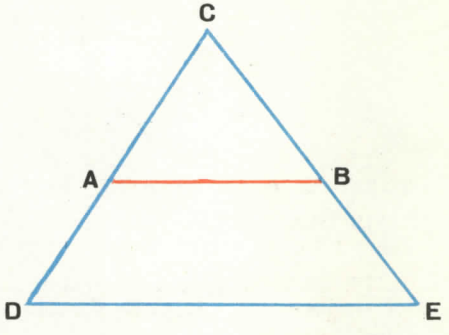


EJERCICIOS

1. En una clase no hay suficientes alumnos para ocupar todos los asientos. ¿Qué clase de correspondencia puedes establecer entre los dos conjuntos: el de alumnos y el de asientos?

2. Si $A=\{1, 2, 3\}$ y $B=\{a, b\}$, define una función uniforme entre A y B, y traza el grafo correspondiente.

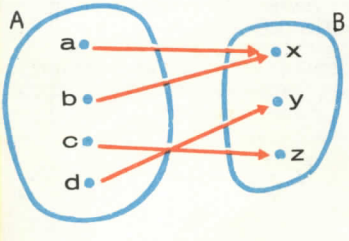
3. ¿Son coordinables los conjuntos $A=\{1, 2, 3\}$ y $B=\{a, b, c\}$? ¿Cuántas maneras hay de aplicar los elementos de estos dos conjuntos, o sea, de establecer correspondencias biunívocas entre ellos?



4. El conjunto de puntos del segmento AB ¿puede ponerse en correspondencia biunívoca con el conjunto de puntos del segmento DE? ¿Cómo lo harías?

5. La función f asigna a cada número natural a el número $a+12$. Halla: $f(5)$; $f(12)$; $f(28)$; $f(72)$; $f(108)$; ¿Cuánto vale x si $f(x)=25$; $f(x)=48$; $f(x)=89$; $f(x)=126$?

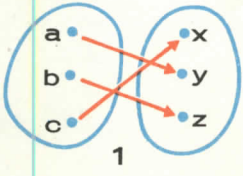
6. Sea f la función que asigna a cada nación su capital. Halla: f (España); f (Venezuela); f (Argentina); f (Perú); f (Costa Rica); f (Italia).



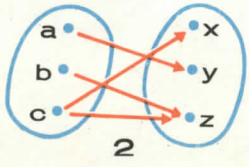
7. Entre los conjuntos $A=\{a, b, c, d\}$ y $B=\{x, y, z\}$ se establece la función f definida por el grafo adjunto. ¿Qué clase de función es f? Detalla los pares que la integran.

8. En el problema anterior, ¿cuál es la función inversa f^{-1}? Detalla sus pares. ¿Es uniforme f^{-1}?

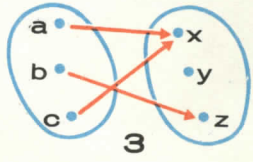
9. ¿Qué clases de funciones son las representadas por los siguientes grafos?



1



2

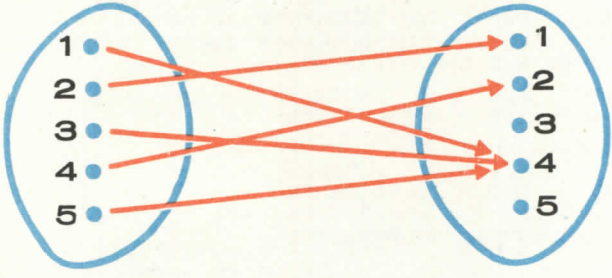


3

10. Sean $A=\{a, b, c\}$ y $B=\{1, 0\}$. ¿Cuántas aplicaciones hay de A en B, y cuáles son?

11. Di qué clases de funciones son las siguientes: a) la que asigna a cada persona humana el número que corresponde a su edad; b) la que asigna a cada nación del mundo el número de habitantes que la pueblan; c) la que a cada libro escrito por un solo autor asigna dicho autor; d) la que a cada nación del mundo asigna su Jefe de Estado.

12. Sea $A=\{1, 2, 3, 4, 5\}$. Sea la función f definida por el diagrama



Halla: 1) $f^{-1}(2)$, 2) $f^{-1}(3)$, 3) $f^{-1}(4)$, 4) $f^{-1}(1)$.

13. La función f asigna a cada número natural a el número $a+3$. ¿Qué número asigna a cada número natural x la función inversa f^{-1}?

14. Establece una correspondencia entre el conjunto de regletas que tú tienes y el conjunto de sus colores. ¿Qué clase de función has definido?

15. En el sorteo de Navidad se da, con cada premio, a qué ciudades ha correspondido. Se tiene así definida una correspondencia. ¿Es ésta unívoca?

16. A cada alumno de tu clase le haces corresponder su cabeza. Explica la clase de función que has definido.

17. ¿Es una biyección la correspondencia entre cada alumno de un Colegio y el curso que estudia? ¿Y entre cada alumno y su firma? ¿Y entre cada alumno y su nombre?

7

El número entero

21. La sustracción de números naturales.—No es siempre posible la sustracción de números naturales. Así, la diferencia

$$2-7$$

no tiene sentido en el campo de los números naturales. Sin embargo, hay muchos problemas de la vida práctica que se traducen por una diferencia: así, el resultado de un partido de fútbol (diferencia de los goles metidos por ambos equipos), el saldo o balance de una Empresa (diferencia entre los ingresos y gastos), etc.

Por esto resulta necesaria la creación de unos nuevos entes o números que hagan posible la sustracción en todos los casos. Dichos números van a venir expresados por pares ordenados de números naturales, como el (2, 7), que sea la diferencia $2-7$ indicada arriba.

22. Pares ordenados de números naturales.—En un partido de fútbol el resultado ha sido

E. local	E. visitante
3 goles	1 gol

Este resultado puede expresarse por el par (3, 1).

En otra ciudad el resultado ha sido (5, 3). La diferencia de goles es también 2, y podemos considerar que los resultados son iguales, o sea:

$$(3, 1) = (5, 3)$$

En ambos casos el resultado del partido viene expresado por un par ordenado, puesto que el hecho de cambiar el orden de los números naturales indicaría un resultado contrario al anterior. Así,

el par (1, 3) indica que el equipo local ha perdido por 2 goles de diferencia.

EJEMPLOS. 1.° Escribe otros pares ordenados iguales a los anteriores. Son, por ejemplo:

$$(3, 1) = (5, 3) = (6, 4) = (7, 5) = (4, 2) = (2, 0)$$

Todos ellos forman una *clase de equivalencia,* que se denomina *número entero.* Cada uno de los pares escritos es un representante de dicho número entero, y el último de ellos, o sea, el (2, 0), se llama *representante canónico:* es el más sencillo de todos.

2.° Una Empresa ha tenido 7 millones de ingresos y 4 millones de gastos. Expresa el resultado económico de la misma en forma de par, y escribe otros pares iguales.

$$(7, 4) = (6, 3) = (5, 2) = (4, 1) = (3, 0)$$

23. Pares iguales.—¿Qué significa realmente que $(3, 1) = (6, 4)$? Significa que

$$3 - 1 = 6 - 4 = 2.$$

Lo que se expresa así:

$$(3, 1) = (6, 4) \iff 3 - 1 = 6 - 4 \qquad (1)$$

Observemos que la segunda equivalencia es una igualdad entre números naturales, con los cuales ya sabemos operar. Así, transponiendo los términos que están restando, se obtiene

$$3 - 1 = 6 - 4 \iff 3 + 4 = 6 + 1$$

y, por tanto:

$$(3, 1) = (6, 4) \iff 3 + 4 = 1 + 6 \qquad (2)$$

En esta igualdad de pares se llaman *extremos* al 3 y al 4, y *medios* al 1 y al 3. Tenemos:

En dos pares iguales la suma de los extremos es igual a la suma de los medios.

Lo que ocurre en este caso lo definimos, en general, para toda clase de pares:

$$(a, b) = (c, d) \iff a + d = b + c \qquad (2')$$

EJEMPLOS. 1.º En un partido de baloncesto el resultado ha sido el indicado en la figura, o sea (38, 44), habiendo perdido el equipo

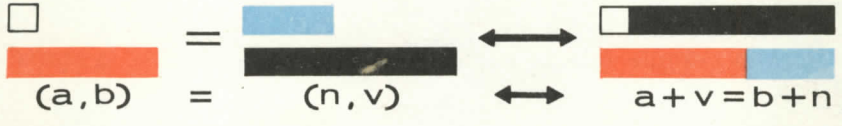
local por 6 tantos. El resultado sería el mismo si hubiera sido (50, 56) porque la diferencia de goles sería la misma, o sea

$$(38, 44) = (50, 56)$$

Pero ahora observa que las diferencias $38 - 44$ y $50 - 56$ no son números naturales, luego no se puede aplicar la equivalencia (1), pero sí la (2) o (2'):

$$(38, 44) = (50, 56) \iff 38 + 56 = 44 + 50 = 94.$$

2.º Escoge los pares de regletas (a, b) y (n, v). ¿Son iguales:



Se cumple que la suma de extremos es igual a la suma de medios:

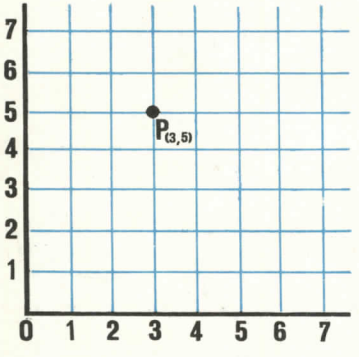
$$a + v = b + n.$$

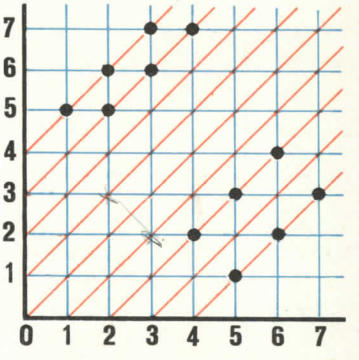
Luego los dos pares son iguales:

$$(a, b) = (n, v).$$

24. Representación gráfica.—Para los ejercicios siguientes conviene que utilices papel cuadriculado. Señala en el papel cuadriculado dos semirrectas perpendiculares con el origen común. A estas semirrectas las vamos a llamar **ejes de coordenadas.**

Sobre ellos se llevan, en el eje horizontal los primeros componentes de los pares, y sobre el eje vertical los segundos componentes de los mismos. Así, el par (3, 5) está representado como se indica en la 1.ª figura por el punto *P*.





EJEMPLOS. 1.º Representa los pares (4, 2), (5, 3), (4, 7) y (6, 8).

2.º Escribe los pares representados por los puntos de la figura 2.ª

¿Cómo están situados los puntos correspondientes a los pares que son iguales entre sí?

Observa que dichos pares están situados en una misma recta paralela a la bisectriz del ángulo de los ejes de coordenadas.

25. Clases de pares.—La relación de igualdad de pares que acabamos de definir, ¿es una relación de equivalencia?

Tiene las siguientes propiedades:

1.ª **Reflexiva.** $(3, 7) = (3, 7)$.

Porque cumple que la suma de extremos es igual a la suma de medios:

$$3 + 7 = 7 + 3.$$

2.ª **Simétrica.** $(3, 7) = (5, 9) \Longrightarrow (5, 9) = (3, 7)$.

En efecto,

$$(3, 7) = (5, 9) \Longleftrightarrow 3 + 9 = 7 + 5 \Longrightarrow 5 + 7 = 9 + 3 \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow (5, 9) = (3, 7).$$

Explica detenidamente cada uno de estos pasos.

3.ª **Transitiva.**

$$\left.\begin{array}{l}(3,7)=(5,9)\\(5,9)=(6,10)\end{array}\right\} \Longrightarrow (3,7)=(6,10).$$

En efecto,

$$\begin{array}{l}(3,7)=(5,9) \iff 3+9=7+5\\(5,9)=(6,10) \iff 5+10=9+6.\end{array}$$

Sumando ordenadamente las dos últimas igualdades

$$3+9+5+10=7+5+9+6$$

o sea, simplificando

$$3+10=7+6 \iff (3,7)=(6,10).$$

Por tanto, el criterio de igualdad enunciado es una relación de equivalencia, que realiza una partición del conjunto de pares en clases, o sea, en conjuntos disjuntos.

Mediante el criterio de igualdad de pares comprueba que los pares de cada fila siguiente son iguales:

$$\begin{array}{l}(2,0)=(3,1)=(4,2)=(5,3)=(6,4)=\ldots\\(1,0)=(2,1)=(3,2)=(4,3)=(5,4)=\ldots\\(0,0)=(1,1)=(2,2)=(3,3)=(4,4)=\ldots\\(0,1)=(1,2)=(2,3)=(3,4)=(4,5)=\ldots\\\ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\end{array}$$

Como ves, el número de pares ordenados iguales en cada fila es ilimitado, y también lo es el número de filas.

Cada fila de pares ordenados iguales *constituye una* CLASE DE EQUIVALENCIA, y *cada par de una clase* se llama REPRESENTANTE DE LA CLASE. Luego cada clase tiene infinitos representantes.

26. Representantes canónicos.—Al representante más sencillo de cada clase se le llama *representante canónico;* éstos son los pares ordenados de la primera columna, es decir: ... (2, 0), (1, 0), (0, 0), (0, 1), (0, 2), ...

La clase cuyo representante es el (4, 0) *se la suele representar por* $+4$ *y la clase cuyo representante canónico es el* (0, 3) *se la suele representar por* -3.

Así,

$$\begin{array}{l}(9,5)=(8,4)=(7,3)=(6,2)=(5,1)=(4,0)=+4\\(5,8)=(4,7)=(3,6)=(2,5)=(1,4)=(0,3)=-3\end{array}$$

Hay que insistir en que en las denominaciones anteriores, los signos + y − no son operativos, sino simplemente *predicativos;* indican una cualidad: el ser las primeras componentes mayores o menores que las segundas, o sea el ser positivas o negativas. No han de confundirse con los signos + y − de la adición y sustracción. Lo mismo se hubieran podido tomar cualesquiera otros.

27. Número entero.—*Cada una de las clases de pares ordenados de números naturales se llama* **número entero.**

Por consiguiente, cada par será un representante del número entero correspondiente. Así:

a) (2, 1), (3, 2), (4, 3), (5, 4), son representantes del número entero +1, **positivo.**

b) (3, 1), (4, 2), (5, 3), (6, 4), son representantes del número entero +2, **positivo.**

c) (1, 4), (2, 5), (3, 6), (4, 7), son representantes del número entero −3, **negativo.**

Los números enteros que llevan signo + se llaman **positivos,** y los que llevan signo −, **negativos.**

También podemos decir que

Número entero es un par ordenado de números naturales y todos sus iguales.

El conjunto de todos los pares ordenados de números naturales es el conjunto $N \times N$; llamando R la relación (2′) de igualdad de pares del párrafo 23, y Z el conjunto de los números enteros o clases de equivalencia, el conjunto cociente es

$$\frac{N \times N}{R} = Z$$

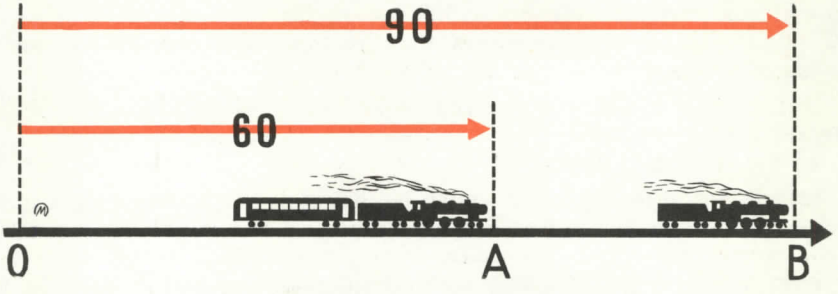
28. Conjuntos de doble sentido.—Algunos conjuntos de valores o cantidades pueden medirse en dos **sentidos** contrarios.

Así, las temperaturas de una región pueden ser por encima o por debajo del cero. La latitud de los puntos de la Tierra puede ser al Norte o al Sur del Ecuador. Un comerciante, que tiene cuenta corriente con otro, puede ser acreedor o deudor al mismo. Un coche de la línea Madrid-Santander que sale de Segovia, puede hacerlo en dos sentidos contrarios: de Segovia hacia Madrid o de Segovia hacia Santander.

Estas cantidades vienen siempre medidas por **números enteros.**

EJEMPLO. *Dos trenes A y B de la línea Madrid-Irún salen de Valladolid a las 8 de la mañana. Dos horas después A está a 60 km de Valladolid, y B a 90 km de la misma población. ¿Cuánto distan entre sí A y B?*

Las figuras muestran que hay dos respuestas para esta pregunta, según que los trenes caminen en el mismo sentido o en sentido



contrario. En el primer caso distan entre sí $90-60=30$ km, y en el segundo caso $90+60=150$ km.

No basta, pues, dar la distancia a que se encuentran los trenes de Valladolid; es necesario dar, además, el sentido. Se acostumbra a tomar uno cualquiera de los sentidos como *más* (+), o *positivo*, y el otro como *menos* (−), o *negativo*. Así, en la figura 1.ª, tomando el sentido hacia derecha como positivo, es $OA=+60$ km, $OB=+90$ km; pero en la figura 2.ª es $OA=-60$ km, $OB=90$ km.

Lo mismo se acostumbra a hacer en todos los conjuntos de doble sentido. En ellas las cantidades medidas en uno de los sentidos se antecede del signo +, y se denominan *positivas*, y las medidas en el sentido contrario van precedidas del signo −, y se denominan *negativas*. De ordinario se toma el sentido hacia derecha o hacia arriba como positivo, y el sentido hacia izquierda o hacia abajo como negativo.

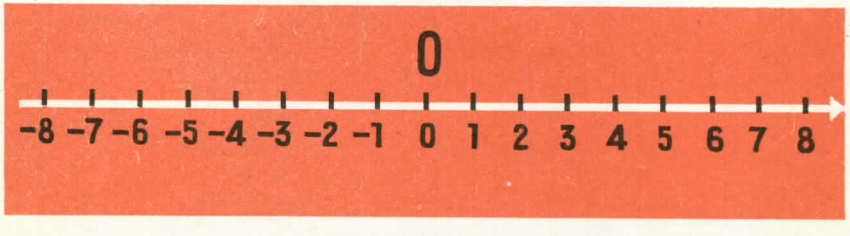
Así, $+50°$ C quiere decir 50° C sobre cero; $-273°$ C significa 273° C bajo cero. Una latitud de $+39°$ es lo mismo que 39° Norte, y una latitud de $-80°$ significa 80° Sur. Si el saldo de un comerciante con un Banco es de −3.500 ptas., esto quiere decir que el comer-

ciante debe al Banco 3.500 ptas. Lo contrario sería si el saldo fuera de +3.500 ptas. El año −230 indica el año 230 antes de Nuestro Señor Jesucristo, y el año +1968 es el año 1968 después del Nacimiento de nuestro Salvador.

29. Representación lineal de los números enteros.—En la representación gráfica dada en el párrafo 24 observamos que los números enteros *positivos* vienen dados por rectas paralelas a la bisectriz del cuadrante, y sus representantes canónicos vienen todos en el eje de abscisas.

Del mismo modo, los enteros *negativos* vienen dados por rectas paralelas a la bisectriz, y sus representantes canónicos vienen todos en el eje de ordenadas.

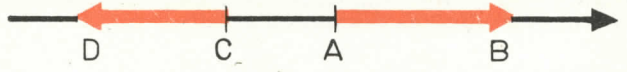
Dando un giro de 90° a este eje, hacia la izquierda, aparecerán todos los números enteros, representados por sus elementos canónicos sobre una *recta orientada,* o *eje,* que es una recta en la que se admite un origen *O,* una unidad de longitud *OU* y uno de los dos sentidos como sentido positivo. El sentido opuesto se considera negativo. De ordinario se coloca una flecha en uno de los extremos de la recta orientada para indicar el sentido positivo. Para represen-



tar los números naturales en esta recta basta llevar en el sentido positivo, a partir de *O,* el segmento *OU,* una, dos, tres, ..., veces, y los extremos de estos segmentos designarán los números 1, 2, 3, ... Llevando el mismo segmento *OU* en el sentido negativo, obtendremos los puntos −1, −2, −3, ...

A cada uno de los puntos así representados sobre la recta le corresponde, por tanto, un número, que se denomina su *abscisa.* Y, recíprocamente, a todo número entero le corresponde un punto sobre la recta. Tenemos, pues, aquí una correspondencia entre los números enteros y los puntos de la recta, y, por tanto, una *representación gráfica,* intuitiva y sencilla de los problemas aritméticos con dichos números.

30. Segmentos orientados.—En una recta orientada se llama **segmento positivo** a aquel, como el AB, en que el sentido del primer



extremo (u *origen*) al segundo (simplemente *extremo*) es el positivo. En cambio, el segmento CD es **negativo,** porque el sentido del origen C hacia el extremo D es el negativo.

A los segmentos positivos y negativos se les llama **segmentos orientados.**

Se denomina **medida algebraica** de un segmento orientado a *la diferencia entre la abscisa del extremo y la del origen.*

EJEMPLOS. 1.° Si AB es positivo, ¿cómo es BA?

2.° Si llamamos a la abscisa de A y b la abscisa de B, ¿cómo es la medida algebraica $b-a$ de AB? ¿Y la medida algebraica $a-b$ de BA?

3.° Si CD es negativo, ¿cómo es DC? ¿Cómo es la medida algebraica $d-c$ de CD, y la medida algebraica $c-d$ de DC?

EJERCICIOS

1. El resultado de un partido ha sido (2, 5) o bien 2—5. Interpreta este resultado.

2. En tres partidos de fútbol entre las selecciones de los alumnos de 3.° y de 2.° curso, los resultados fueron

alumnos de 3.°	alumnos de 2.°
4	2
3	1
5	3

Escribe estos resultados en forma de pares. ¿Cómo son estos pares?

3. Una empresa ha tenido 12 millones de ingresos y 15 millones de gastos. ¿Cómo se expresa el beneficio de la misma mediante un par? Escribe otros pares iguales a él y explica en qué criterio de igualdad te basas.

4. Tres depósitos de agua están llenos. Se abren los grifos para que salga agua de ellos, al mismo tiempo que se lanzan los motores para que entre agua en los depósitos. Los resultados por minuto son:

	Entrada en litros/min	Salida en litros/min
1.er depósito	5	8
2.° "	3	6
3.er "	4	7

Expresa los resultados por medio de pares, e indica cómo son éstos.

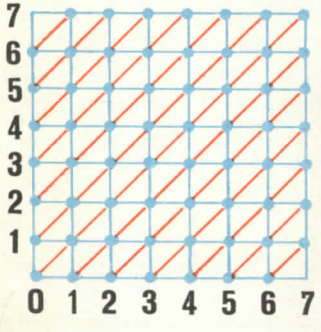
5. Un señor tiene 30 millones de pesetas, y debe 12 millones de pesetas. Explica por medio de un par el estado de su capital

6. Un coche recorre por una carretera desde el kilómetro 16 hasta el 57. Expresa por un par el camino recorrido y por otro el camino de regreso.

7. Con enunciados convenientes interpreta los resultados siguientes: (4, 3), (8, 12), (9, 3), (7, 5), (6, 15) y (12, 9).

8. En la línea Madrid-Avila-Irún se sabe que Avila dista de Madrid 121 km, y que a un instante dado un tren dista de Avila 50 km y otro tren está a 30 km de Avila. Expresa mediante 4 pares ordenados de números las dos distancias posibles entre estos dos trenes.

9. Tres niños, Juan, Pedro y Pablo, nacieron en 1960. Sólo se sabe que Juan nació el primero de mayo, que Juan y Pedro tiene cuatro meses de diferencia de edad y que Juan y Pablo tienen tres meses de diferencia de edad. Halla los pares ordenados de números que den las diferencias posibles de edad de Pedro y Pablo.



10. Escribe un enunciado de la vida ordinaria, referente a temperaturas, cuya representación gráfica sea el punto (7, 4).

11. En el gráfico adjunto ¿dónde están las clases de pares iguales? ¿Y dónde están los elementos canónicos de las mismas?

12. ¿Cómo comprobarías si los pares (10, 4) y (8, 2), así como los pares (7, 3) y (6, 4) son iguales o desiguales? Ensaya los dos criterios estudiados.

13. Los pares de regletas de la figura, (m, n) y (r, v), ¿son iguales o desiguales? ¿Por qué?

14. Escribe varios pares de cada una de las clases: $(5, 0) = +5$; $(0, 6) = -6$; $(7, 0) = +7$; $(0, 8) = -8$.

15. ¿Cuál es el representante canónico de cada una de las clases representadas por los siguientes pares: (7, 5); (8, 3); (4, 4); (3, 5) y (5, 9)?

16. Escribe varios representantes del número entero $+2$.

17. Escribe varios representantes del número entero -5.

18. ¿De qué número entero es representante $3-9$? Escribe otros representantes de este número entero.

19. Representa gráficamente los números enteros -2, $+1$, -4 y $+5$.

20. Un ciclista parte de un punto y corre 18 km hacia el norte ($+18$ km), luego 10 km hacia el sur (-10 km). ¿A qué distancia se encuentra del punto de partida?

21. ¿A qué distancia y a qué lado del punto de partida se encuentra

un viajero que camina hacia el este (+) o hacia el oeste (−), según se indica por los siguientes pares de números: +16 km, luego −6 km?; ¿−20 km, luego +28 km?; ¿−18 km, luego +18 km?; ¿100 km, luego 50 km?

22. Designando la latitud norte por el signo + y la latitud sur por el signo −, da el significado de las siguientes latitudes: $+28^{\circ}$, $+2^{\circ}$, -18°, $+12^{\circ}$, -10°.

23. Di el signo que debe preceder a la latitud de Valencia, Bruselas, Quito, Tucumán, Goa, Sydney, Guinea española, Río de Janeiro y La Paz.

24. Un hombre camina 18 km hacia el sur y luego 23 km hacia el norte. ¿A qué distancia se encuentra del punto de partida? Halla la solución gráficamente.

25. Un elevador baja 32 m desde la galería principal de una mina y luego sube 144 m. ¿A qué distancia está de la galería principal?

26. Un móvil recorre 20 km avanzando; luego retrocede 15 km, avanza 20 km y, por último, retrocede 15 km. ¿A qué distancia se encuentra del punto de partida?

27. El móvil del problema anterior se encuentra a 60 km del lugar de partida, habiendo efectuado el recorrido en tres etapas, la primera de (+45 km) y la segunda de (−20 km). ¿Cuántos kilómetros habrá recorrido en la tercera?

8

Adición de números enteros

31. Adición de pares.—Los resultados de dos partidos de una eliminatoria de Copa entre dos equipos han sido:

	Equipo A	Equipo B
1.er partido	5	2
2.º partido	1	3

¿Quién ha ganado la eliminatoria?

Los resultados de los dos partidos para el equipo A han sido $(5, 2)$ y $(1, 3)$ y el de la eliminatoria $(5+1,\ 2+3)=(6,\ 5)$.

Ha ganado el equipo A por 6 goles a 5.

Podemos escribir:

$$(5, 2)+(1, 3)=(5+1, 2+3)$$

Y, en general, convenimos que

$$(a, b) + (c, d) = (a+c, b+d)$$

Los pares (5, 2) y (1, 3) se llaman **sumandos,** y el par $(5+1, 2+3)$ se llama **suma.**

La operación realizada se llama **adición de pares.**

La suma de dos pares es otro par cuyo primer elemento es la suma de los primeros elementos de los sumandos, y cuyo segundo elemento es la suma de los segundos elementos de los sumandos.

EJEMPLOS. 1.º Demuestra que aplicando las propiedades de las sumas y diferencias de números naturales se llega al resultado:

$$(5, 2) + (3, 1) = (8, 3)$$

En efecto

$$(5-2)+(3-1) = [(5-2)+3]-1 = [(5+3)-2]-1 = \\ = (5+3)-(2+1) = 8-3$$

Explica qué propiedad has aplicado en cada uno de los pasos.

2.º Si nos hubieran pedido demostrar del mismo modo que

$$(2, 6) + (3, 4) = (5, 10)$$

no hubiéramos podido hacerlo, porque $2-6$ y $3-4$ no significan nada dentro del campo de los números naturales, y no podríamos aplicar las propiedades de éstos. En este caso lo que hacemos es dar como definición el resultado anterior.

32. Propiedad uniforme de la adición de pares.—Supongamos que los resultados de los dos partidos de la eliminatoria de Copa del número anterior sean los siguientes:

	Equipo A	Equipo B
1.er partido	4	1
2.º partido	3	5

Compara estos resultados a los del número anterior, y halla el resultado de la eliminatoria.

Observa que ahora los resultados de los partidos son iguales a los del número anterior

$$(4, 1) = (5, 2); \qquad (3, 5) = (1, 3)$$

y el resultado de la eliminatoria también es el mismo

$$(4+3, 1+5) = (7, 6) = (5+1, 2+3) = (6, 5)$$

Esta propiedad es general: *sumando pares iguales se obtienen como resultados sumas iguales.*

Esta es la **propiedad uniforme de la adición de pares.**

EJEMPLOS. 1.º Por la importancia que tiene, conviene trates de demostrar la propiedad anterior. Así

$$\begin{array}{l} (4, 1) = (5, 2) \iff 4+2 = 1+5 \\ (3, 5) = (1, 3) \iff 3+3 = 5+1 \end{array}$$

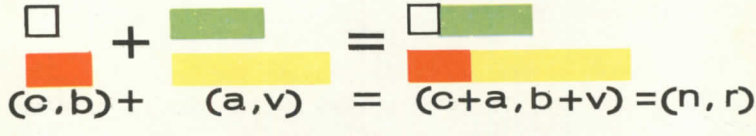
$$\Downarrow$$

$$(4+3, 1+5) = (5+1, 2+3) \iff (4+3)+(2+3) = (1+5)+(5+1)$$

¿Por qué?

Es decir, *si se suman miembro a miembro varias igualdades de pares resulta otra igualdad de pares, ya que en el resultado se cumple el segundo criterio de la igualdad de pares.*

2.º Con las regletas efectúa la suma $(c, b) + (a, v)$



y comprueba que se obtiene el mismo resultado sumando otros dos pares iguales a éstos, por ejemplo $(r, v) + (v', r)$

Y efectivamente $(n, r) = (n', n)$

33. Adición de números enteros.—Sabemos que

$$(5, 2) + (1, 3) = (6, 5)$$

o sea que, tomando los representantes canónicos,

$$(3, 0) + (0, 2) = (1, 0)$$

es decir

$$(+3) + (-2) = (+1)$$

Decimos que **el número entero $(+1)$ es la suma de los números enteros $(+3)$ y (-2).**

Esta suma **es única, cualesquiera que sean los representantes que tomemos de las clases $(+3)$ y (-2)**, según se demostró en el número anterior.

Esta es la **propiedad uniforme** de la adición de números enteros.

Por tanto, *para sumar dos números enteros $(+3)$ y (-2), se elige un par representante de cada uno, y se suman; el par así obtenido representa un número entero, que es la suma de los dos dados.*

EJEMPLOS. 1.° Halla la suma $(+4) + (-6)$

$$\begin{array}{rcl} \text{Para } +4 & \xrightarrow{\text{elegimos}} & (7, 3) \\ \text{Para } -6 & \xrightarrow{\text{elegimos}} & (2, 8) \\ \hline -2 & \xleftarrow{\text{Esta clase da la suma}} & (7+2,\ 3+8) \end{array}$$

El número entero -2 es la suma de $+4$ y -6, lo cual en la práctica se expresa así

$$(+4) + (-6) = -2.$$

2.° Halla la suma $(+4) + (-6)$ por medio de los representantes canónicos:

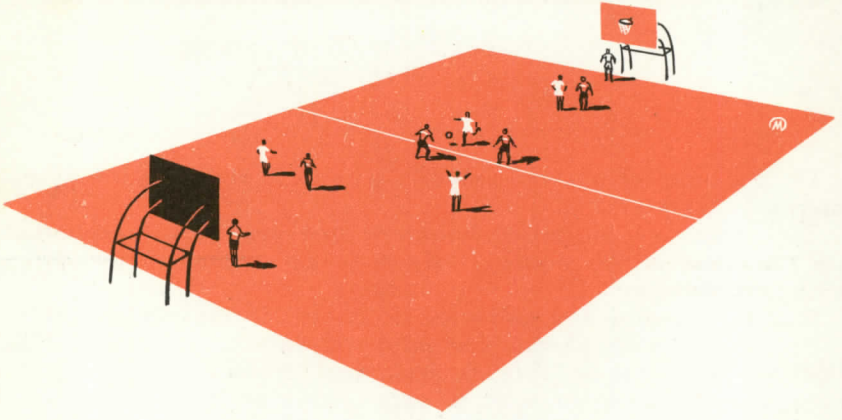
$$(+4) + (-6) = (4, 0) + (0, 6) = (4, 6) = -2$$

El resultado es el mismo que antes.

3.° *Dos equipos de baloncesto, A y B, han jugado dos partidos con los siguientes resultados:*

A	*B*
63	54
29	85

¿Qué equipo ha quedado vencedor? ¿Qué número entero representa el resultado?



Solución:

$$(63, 54) + (29, 85) = (63 + 29, 54 + 85) = (92, 139).$$

El equipo A tiene un total de 92 puntos y el B 139, luego ha ganado el B.

El representante canónico del par anterior es el

$$(0, 139 - 92) = (0, 47)$$

por lo que el número entero que representa el resultado será el -47, lo que quiere decir que el A ha perdido por 47 puntos.

34. Valor absoluto de un número entero.—Se llama **módulo** o **valor absoluto** de un número entero $+m = (m, o)$ o $-n = (o, n)$ al número natural m o n, respectivamente. Así, el valor absoluto de $(+5)$ es 5 y el de (-8) es 8.

Hay que hacer las siguientes observaciones:

1.ª El valor absoluto y el signo de un número entero están unidos uno a otro y no pueden separarse; por eso, frecuentemente, los números enteros se colocan entre paréntesis.

2.ª Cuando un número entero se representa por una letra, su signo está incorporado a la letra. Así A puede representar tanto un número positivo como negativo. Su valor absoluto se representa por el símbolo: $|A|$. Así, si A designa el número (-15), se tiene $|A| = 15$.

35. Adición de dos números enteros positivos.—Tratamos de sumar los números enteros positivos representados por (6, 2) y (4, 1). Ya que la suma es independiente de los representantes elegidos, vamos a tomar los más sencillos, esto es; los elementos canónicos:

$$(6, 2) = (4, 0) = +4; \qquad (4, 1) = (3, 0) = +3$$
$$(+4) + (+3) = (4, 0) + (3, 0) = (7, 0) = +7$$

Haciendo varios otros ejemplos análogos, comprueba que

La suma de dos números positivos es otro número también positivo.

Para sumar dos números positivos se suman sus valores absolutos y se conserva el signo de aquéllos.

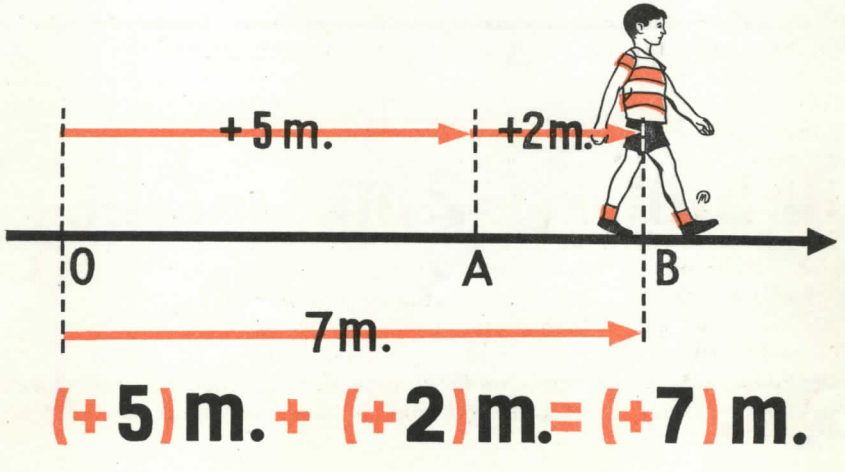
EJEMPLOS. 1.º Halla $(+5) + (+2)$; $(+1) + (+7)$.

Solución. $(+5) + (+2) = +7$; $(+1) + (+7) = +8$.

2.º *Luis, saliendo de un punto O, anda primero hacia el este 5 m; luego marcha otros 2 m en el mismo sentido. ¿A qué distancia se encontrará del origen?*

Evidentemente, se encontrará a $5 + 2 = 7$ m a derecha del punto *O*. Escribiremos

$$(+5) + (+2) = (+7).$$



36. Adición de dos números enteros negativos.—Halla $(-3)+(-5)$.

Tomando como antes los representantes canónicos

$$(-3)+(-5)=(0,3)+(0,5)=(0,8)=-8$$

Haciendo varios otros ejemplos análogos, comprueba que

La suma de dos números negativos es otro también negativo. Para sumar dos números negativos se suman sus valores absolutos y se conserva el signo de aquéllos.

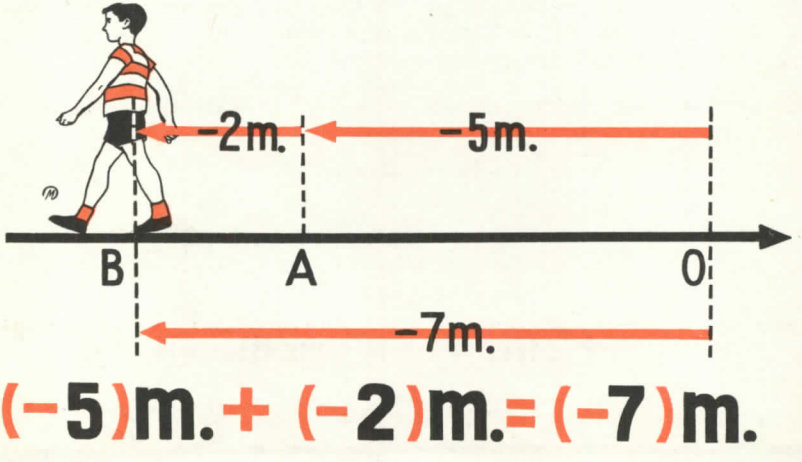
EJEMPLOS. 1.º Efectúa $(-6)+(-2)$; $(-8)+(-10)$.

Solución. $(-6)+(-2)=-8$; $(-8)+(-10)=-18$.

2.º *Luis camina primero hacia el oeste 5 m, y a continuación 2 m en el mismo sentido.*

En este caso se encontrará a $5+2=7$ m a izquierda del punto O. Se escribirá así:

$$(-5)+(-2)=(-7).$$



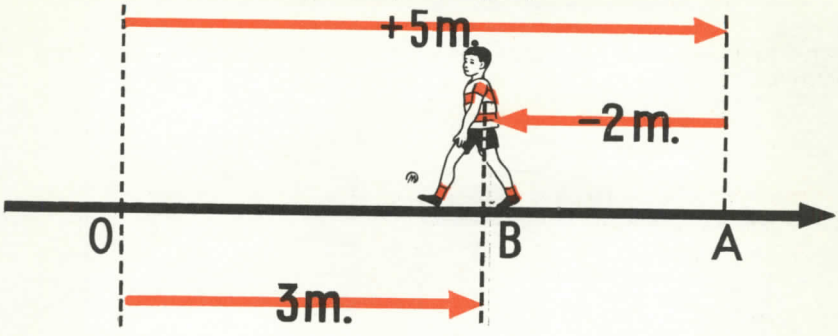
(−5)m.+ (−2)m.= (−7)m.

37. Adición de un número positivo y otro negativo. 1.º Efectúa $(+7)+(-5)$:

$$(+7)+(-5)=(7,0)+(0,5)=(7,5)=(2,0)=+2$$

EJEMPLO.—*Luis marcha hacia el este 5 m, y luego hacia el oeste 2 m.* Distará del punto de partida $5-2=3$ m, a la derecha del mismo. O sea

$(+5)+(-2)=(+3)$



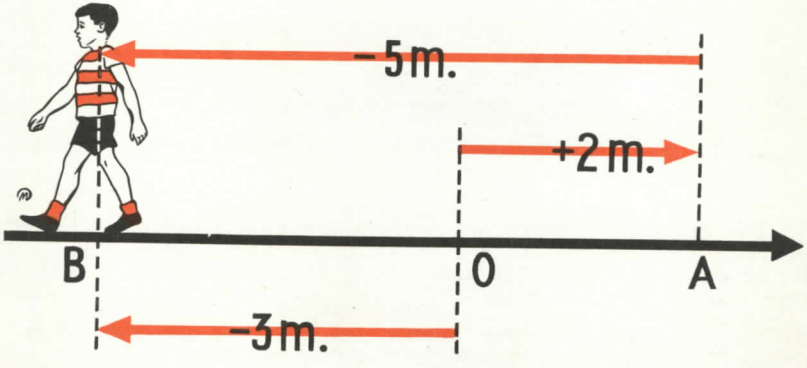
(+5)m. + (−2)m. = 3 m.

2.º Efectúa $(+4)+(-9)$

$$(+4)+(-9)=(4,0)+(0,9)=(4,9)=(0,5)=-5$$

EJEMPLO.—*Luis camina hacia el este 2 m, y a continuación 5 m hacia el oeste.* Se hallará a $5-2=3$ m a izquierda de *O*. Esto es

$$(+2)+(-5)=(-3).$$



(+2)m. + (−5)m. = (−3)m.

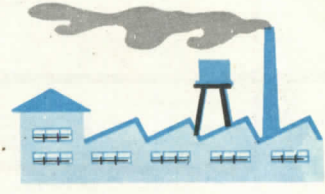
Haciendo varios otros ejemplos análogos, comprueba que

Para sumar un número positivo y otro negativo se restan sus valores absolutos, y se pone a la diferencia el signo del número de mayor valor absoluto.

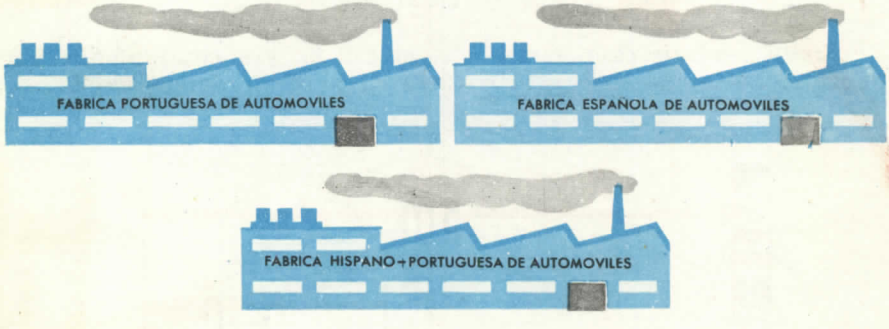
EJERCICIOS

1. Una empresa ha tenido los siguientes resultados en dos años consecutivos:

	Debe	Haber
1.er año	2	4
2.º año	5	6



¿Cuál es en conjunto el resultado económico de la empresa en estos dos años? Hállalo como suma de enteros.



2. Dos empresas comerciales cuyas situaciones económicas vienen representadas por los pares (5, 3) y (8, 6) se unen, dando lugar a una nueva empresa comercial. ¿Cómo vendrá representada la situación económica de esta nueva empresa?

3. Dos labradores quieren reunir sus cosechas de trigo para una venta mejor. El primero recogió 12 vagones de trigo pero debe 4, y el segundo recogió 9 vagones de trigo pero debe 2. Hallá la recolección total en forma de suma de enteros.

4. Un estudiante quiso probar su suerte jugando a las cartas. El primer día por la mañana ganó 3 ptas. y por la tarde perdió 9; el segundo día por la mañana ganó 4 y por la tarde perdió 7 ptas. La situación de los dos días de juego exprésala en la forma de suma de enteros.

5. Un hombre itene un sueldo mensual de 8.000 ptas. y gasta 6.000 pesetas. El único hijo que gana dinero con su trabajo tiene un sueldo de

5.000 ptas., pero gasta 4.000 ptas. ¿Qué ahorro mensual se hace en la familia?

6. Una casa tiene dos depósitos de agua que están llenos. Se abren los grifos y al mismo tiempo se lanzan los motores que suben el agua. Por hora, el primer depósito deja salir 20 litros y recibe 15 litros; el segundo depósito deja salir 30 litros y recibe 24 litros. ¿Cuál es la pérdida de agua experimentada por ambos depósitos?

7. Los resultados de dos partidos de fútbol han sido

	Equipo *A*	Equipo *B*
1.er partido	6	4
2.º partido	3	3

¿Cuál es el resultado de los dos partidos conjuntamente?

8. Halla las sumas:

a) $(+3)+(+7)$; c) $(+5)+(+13)$;
b) $(+12)+(+2)$; d) $(+9)+(+3)$.

9. Efectúa:

a) $(-5)+(-18)$; c) $(-6)+(-11)$;
b) $(-6)+(-8)$; d) $(-7)+(-15)$.

10. Halla:

a) $(+12)+(-7)$; c) $(+11)+(-9)$;
b) $(+6)+(-8)$; d) $(+6)+(-12)$.

11. En un depósito había 32 litros de agua y han sacado 14 litros. En otro depósito había 18 litros y han sacado 10. ¿Qué cantidad de agua había entre los dos depósitos? ¿Cuánta agua han sacado? ¿Cuánta agua queda?

12. Un comerciante, en un artículo ha ganado 5.322 pesetas y en otro artículo ha perdido 462 pesetas. Al mes siguiente, el mismo comerciante ha ganado en el primer artículo 1.832 pesetas y en el otro artículo pierde 2.324 pesetas. ¿Cuál es la situación de las pérdidas y ganancias en los dos artículos?

9

Propiedades de la adición de números enteros

38. Propiedad conmutativa.—Halla

$$(-4)+(-6)=-10\,; \qquad (-6)+(-4)=-10$$

Luego

$$(-4)+(-6)=(-6)+(-4)$$

El orden de los sumandos no altera la suma.

EJEMPLOS. 1.° Comprueba que

$$(3, 5)+(8, 4)=(8, 4)+(3, 5)$$

En efecto,

$$(3, 5)+(8, 4)=(11, 9)=(2, 0)$$
$$(8, 4)+(3, 5)=(11, 9)=(2, 0)$$

2.° Demuestra, basándote en la propiedad conmutativa de la adición de naturales, que

$$(3, 5)+(8, 4)=(8, 4)+(3, 5)$$

En efecto,

$$(3, 5)+(8, 4)=(3+8, 5+4)=(8+3, 4+5)=(8, 4)+(3, 5)$$

39. El paréntesis.—El paréntesis indica que la operación encerrada en el mismo es la primera que hay que realizar.

EJEMPLOS. 1.° Efectúa

$$[(+3)+(-4)]+(-6)$$

$$[(+3)+(-4)]+(-6)=$$
$$=(-1)+(-6)=-7.$$

2.° Un cajero, a las 9 de la mañana, recibe 300 ptas. y entrega 200 ptas. A las 10 en-

trega 500 ptas. ¿Cuál es el resultado de este movimiento de dinero?

$$[(+300)+(-200)]+(-500)=(+100)+(-500)=-400.$$

Disminuyeron sus fondos en 400 ptas.

40. Propiedad asociativa.—Efectúa:

$$[(+4)+(-3)]+(-5)=(+1)+(-5)=-4$$
$$(+4)+[(-3)+(-5)]=(+4)+(-8)=-4$$

Luego $[(+4)+(-3)]+(-5)=(+4)+[(-3)+(-5)]$

EJEMPLOS. 1.° Aplica las propiedades asociativa y conmutativa a la expresión

$$[(+5)+(-2)]+(-8)$$

y comprueba que la adición de tres números enteros se puede hacer en cualquier orden y forma, obteniéndose en todos los casos el mismo resultado. Por lo que se puede escribir simplemente sin paréntesis

$$(+5)+(-2)+(-8)$$

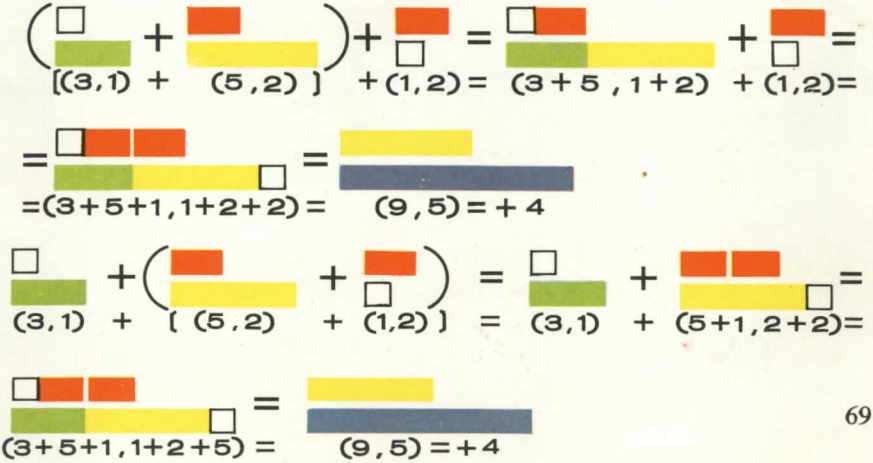
Y análogamente para cualquier número de sumandos.

2.° Demuestra, utilizando las regletas, que

$$[(3,1)+(5,2)]+(1,2)=(3,1)+[(5,2)+(1,2)]$$

Para ello elegimos los pares de regletas:

$$[(3,1)+(5,2)]+(1,2)=(3,1)+[(5,2)+(1,2)]$$



41. Elemento neutro.—En el conjunto Z de los números enteros consideremos el elemento

$$(0, 0) = (1, 1) = (2, 2) = (3, 3) = (4, 4) = \ldots$$

Se le llama **cero,** o **elemento nulo,** y se le representa simplemente por 0, aunque no hay que confundirle con el número natural 0. Este indica que el conjunto vacío no tiene elemento alguno, mientras que aquél es una clase de pares de números naturales. Se cumple la siguiente propiedad:

$$(a, b) + (0, 0) = (a, b).$$

Cuaquier número entero (a, b), sumado con el número entero cero, da como resultado el mismo número (a, b).

Por esta propiedad al número cero se le llama **elemento neutro** de la adición de enteros.

EJEMPLOS. 1.° Halla la suma $(+5) + 0$

$$(+5) + 0 = (5, 0) + (0, 0) = (5, 0) = +5.$$

2.° Halla la suma $(+8) + 0$

$$(+8) + 0 = +8.$$

42. Elemento opuesto.—Dado un número entero por un representante (a, b), existe siempre otro número entero, representado por el par (b, a), al que llamaremos **opuesto** del primero.
Se cumple está propiedad:

$$(a, b) + (b, a) = (a + b, b + a) = (0, 0) = 0.$$

Cualquier número entero sumado con su opuesto nos da como resultado el número entero cero.

EJEMPLOS. 1.° Halla el opuesto del número entero $(+5)$.

Solución: $(+5) = (5, 0)$.

El opuesto es $(0, 5) = -5$.

2.° Halla el opuesto del número entero (-5).

Solución: $(-5) = (0, 5)$.

El opuesto es $(5, 0) = +5$.

Para hallar el opuesto de un número entero se le cambia de signo.

El opuesto de un número entero A se representa por $-A$.

3.° Halla A en la ecuación $A+(-6)=0$.

Solución: A es el opuesto de (-6), o sea, $A=(+6)$.

43. Resumen de las propiedades de la adición de números enteros.—Hemos encontrado las siguientes propiedades de la adición:

I. **Uniforme:** De dos enteros A y B se obtiene siempre el mismo entero $C=A+B$, cualesquiera que sean los representantes elegidos.

II. **Asociativa:**

$$(A+B)+C=A+(B+C)$$

III. **Elemento neutro:** Es el 0, tal que

$$A+0=A$$

IV. **Elemento opuesto.** Todo número entero A tiene otro opuesto $-A$ tal que

$$A+(-A)=0$$

Observa que el signo $-$ de $(-A)$ tiene distinto significado que el del número negativo -5, o el de la sustracción $7-5$.

V. **Conmutativa:**

$$A+B=B+A.$$

44. Grupo aditivo.—Todo conjunto en el que se pueda definir una operación análoga a la adición y que tenga las cuatro propiedades I a IV, se dice que tiene la estructura de **grupo aditivo.** Y si, además, tiene la propiedad V, decimos que es un **grupo aditivo conmutativo.**

Deducimos que **el conjunto Z de los números enteros es un grupo aditivo conmutativo.**

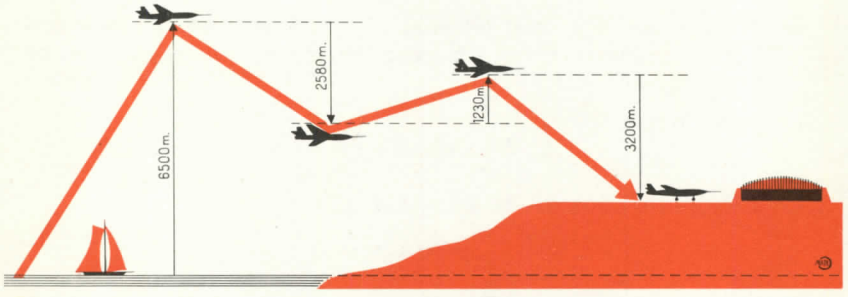
EJERCICIOS

1. Un elevador en una mina parte de un piso y sube 65 m, luego baja 91 m, sube 52 m, baja 13 m, sube 65 m, y para. ¿A qué distancia y en qué sentido está el punto de parada respecto del punto de partida?

2. Un barco parte de la latitud $+20^{\circ}$ y navega $+13^{\circ}$ de latitud, luego -60°, luego $+40^{\circ}$, luego -10°. ¿Cuál es la latitud después de estas navegaciones?

3. ¿Cuál es la latitud de un barco que parte de la latitud de -50°, después de estos cambios de latitud: $+10^{\circ}$, -5°, $+18^{\circ}$, -7°, $+38^{\circ}$, -12°, $+60^{\circ}$?

4. Un comerciante debe a varias fábricas las siguientes cantidades: 4.755 pesetas, 2.400 pesetas, 6.385 pesetas. Y otros comerciantes deben al primero 3.602 pesetas, 1.594,5 pesetas, 5.207 pesetas y, además, tiene en caja 12.540 pesetas. ¿Cuál es su estado financiero?



5. Un avión se eleva a 6.500 m sobre el nivel del mar, luego desciende 2.580 m, vuelve a subir 1.230 m y por último desciende 3.250 m para tomar tierra. ¿A qué altura sobre el nivel del mar se encontraba el aeródromo donde aterrizó?

6. Efectúa las sumas siguientes:

a) $(-4)+(-6)+(+9)$.
b) $(+15)+(-19)+(+13)$.
c) $(-17)+(+12)+(-43)$.
d) $(+5)+(-3)+(+3)+(-5)$.
e) $(-15)+(-40)+(-35)$.
f) $(-100)+(+75)+(+25)$.

7. Calcula el valor de las sumas siguientes:

a) $(-10)+(-15)-(-35)+(+9)-(+14)$.
b) $(-8)-(+16)-(-10)+(-40)+(+1)$.
c) $(+45)-(-60)+(-5)-(+6)$.

8. Efectúa las sumas siguientes:

a) $[5+(-3)]+[(-2)+(-6)]$.
b) $[(-4)+7]+\{(-3)+[8+(-5)]\}$.
c) $\{[6+(-3)]+4\}+[(-1)+7]$.

9. ¿Cómo son las sumas $[(-5)+3]+(-4)$ y $(-5)+[3+(-4)]$?

10. Haciendo las operaciones, comprueba que se verifica la siguiente igualdad:

$$[5+(-2)]+(-6)=5+[(-2)+(-6)].$$

11. Escribir dentro de las figuras números enteros que verifiquen las igualdades siguientes:

a) $[(-5)+\square]+(-2)=6+[(-4)+(-3)]$.
b) $[\bigcirc+3]+(-4)=+5+[\bigcirc+(-4)]$ ¿Es una identidad?
c) $[\bigcirc+(-7)]+\square=\bigcirc+[(-7)+\square]$.
d) $[\bigcirc+\square]+\triangle=\bigcirc+[\square+\triangle]$.

12. Reemplaza las letras por números enteros para que se verifiquen las siguientes igualdades:

a) $[A+(-5)]+3=2+[(-4)+6]$.
b) $[2+(-6)]+B=3+[(-5)+(-1)]$.
c) $[(-4)+(-5)]+C=(-4)+[(-5)+C]$. ¿Es una identidad?

13. Sustituye las letras por números para que se verifiquen las siguientes igualdades:

a) $(-4)+B=B+C$.
b) $A+B=B+A$.
c) $(-5)+C=C+D$.
d) $(-8)+A=A+(-8)$.

14. Sustituye las letras por números para que verifiquen las igualdades siguientes:

a) $A+0=(-3)$; b) $5+B=5$; c) $D+0=6$;
d) $(-4)+C=(-4)$; e) $E+F=E$.

15. Halla las sumas siguientes:

a) $(-7)+0$; b) $6+0$; c) $0+(-4)$; d) $0+(-1)$.

16. Representa gráficamente los números opuestos $+3$ y -3. Observarás que estas representaciones son simétricas repecto de la representación del entero cero.

17. Halla numéricamente el entero E que sumado con (-5) dé de suma 0.

18. Halla el opuesto de: a) -8; b) $(6, 4)$; c) $+7$; d) $(4, 8)$.

19. Demuestra, utilizando las regletas, que

$$[(+5)+(-2)]+(-3)=(+5)+[(-2)+(-3)]$$

20. Plantea y resuelve como suma de enteros este problema: De un depósito de agua Antonio saca 3 litros. Más tarde saca otros 5 litros, y Pedro echa 6 litros. ¿En cuántos litros ha disminuido el depósito?

10

Sustracción de números enteros

45. Definición.—Sustracción de dos números enteros A y B, llamados **minuendo** y **sustraendo,** respectivamente, es la operación que tiene por objeto hallar otro número entero C, llamado **diferencia,** que sumado al sustraendo B nos dé el minuendo A, o sea:

$$A-B=C \iff B+C=A \iff A-C=B \qquad (1)$$

EJEMPLOS. 1.º Dada la igualdad $(+5)+(-3)=+2$, halla las otras dos equivalentes.

Solución:

$$(+5)+(-3)=+2 \iff (+2)-(+5)=-3 \iff$$
$$\iff (+2)-(-3)=+5.$$

2.º Halla

$$X=(-4)-(+1).$$

Solución:

$$X=(-4)-(+1) \iff X+(+1)=-4.$$

Sumemos a los dos miembros el número entero (-1), opuesto al sustraendo. Resulta

$$X+(+1)+(-1)=(-4)+(-1).$$

Pero $(+1)+(-1)=0$, según el número 42, y $X+0=X$, según el número 41; luego queda

$$X=(-4)+(-1)=-5.$$

De este resultado, ¿qué regla deduces para hallar la diferencia de dos números?

46.—Cálculo de la diferencia de dos números enteros.—Sea, por ejemplo, X el valor desconocido de la diferencia $(-8)-(-5)$. La igualdad

$$(-8)-(-5)=X$$

puede ponerse, según la definición

$$X+(-5)=(-8).$$

Añadamos $(+5)$ a los dos miembros; resulta:

$$X+(-5)+(+5)=(-8)+(+5)$$

Pero $(-5)+(+5)=0$ y $X+0=X$, según los números 41 y 42. Luego

$$X=(-8)+(+5)=-3$$

o sea

$$(-8)-(-5)=(-8)+(+5)$$

Para restar dos números, se suma al minuendo el opuesto al sustraendo.

De este modo la sustracción de números enteros se reduce a la adición y no es operación distinta de ella.

Se vio en Primer Curso que la sustracción era imposible, dentro del campo de los números naturales, cuando el sustraendo era mayor que el minuendo. En cambio es posible en todos los casos en el campo de los números enteros. Así, por ejemplo, la diferencia de dos números enteros será un número positivo, si el minuendo es mayor que el sustraendo, y será un número negativo en caso contrario.

Precisamente, la introducción de los números negativos se debió a esto: hacer posible la sustracción en todos los casos.

EJEMPLOS. 1.° Halla $(+6)-(-2)$.

Solución:

$$(+6)-(-2)=(+6)+(+2)=+8.$$

2.° Halla $(-8)-(-5)$.

Solución:

$$(-8)-(-5)=(-8)+(+5)=-3.$$

3.° Halla la diferencia entre 2 y 5.

Solución:

$$2-5=2+(-5)=-3.$$

Siempre que no se ponga signo delante de un número entero se entiende que es +.

4.° Halla la diferencia entre 7 y 4.

Solución:

$$7-4=7+(-4)=3.$$

47. Identificación entre el conjunto N y el conjunto Z^+.—Con la notación Z^+ designamos al conjunto de los enteros positivos, y con la notación N al conjunto de los naturales. Hasta ahora nada nos autoriza a identificar unos con otros, pues en teoría, conceptualmente, nunca podremos equiparar un par ordenado de números naturales con un solo número natural.

Se trata, pues, de dos conjuntos distintos, pero podemos establecer entre ellos una correspondencia biunívoca, tomando como homólogo del número natural a el entero positivo $+a=(a, 0)$. Representemos esta correspondencia así

$$f(a)=(a, 0)$$

Se verifica también

$$f(b)=(b, 0)$$
$$f(a+b)=(a+b, 0)=(a, 0)+(b, 0)=f(a)+f(b)$$

o sea, el homólogo de la suma $a+b$ es igual a la suma de los homólogos $f(a)+f(b)$. Se dice que la correspondencia conserva la adición.

Toda correspondencia biunívoca que cumpla esta propiedad se llama *isomorfismo*.

Aunque los números naturales y los enteros positivos son de distinta naturaleza, el isomorfismo indicado nos autoriza a considerar dichos conjuntos como idénticos en la práctica de las operaciones, escribiendo, por ejemplo,

$$(+a)+(+b)=a+b$$

Se dice que se ha *sumergido* el conjunto N de los números naturales en el conjunto Z de los enteros, o que aquéllos son una parte de éstos. Así

$$\text{enteros} \begin{cases} \text{positivos: naturales} \\ \text{negativos.} \end{cases}$$

EJEMPLOS. 1.° $(+6)-(-11)=6+(+11)=6+11=17.$

2.° $(-5)+(+8)=-5+8=3.$

48. Equivalencias fundamentales.—Las tres igualdades (1) del número 45 se llaman **equivalencias fundamentales** de la sustracción: si una es cierta, lo son también las otras dos. Si una cualquiera de ellas es falsa, lo son igualmente las otras dos.

EJEMPLOS. 1.° Escribe las dos igualdades equivalentes a ésta:

$$16+x=9.$$

Solución:

$$16+x=9 \iff 9-x=16 \iff 9-16=x.$$

De la última deducimos

$$x=9-16=9+(-16)=-7.$$

2.° ¿Qué valor hay que dar a x para que se verifique la igualdad $x-8=4$?

Solución:

$$x-8=4 \iff x=8+4=12.$$

49. Ecuaciones.—¿Qué valor hay que dar a x para que sea cierta la igualdad

$$-7+x=12\,? \qquad (2)$$

La letra x, cuyo valor hay que hallar, se llama **incógnita.** La igualdad que contiene una incógnita se llama **ecuación.**

Resolver una ecuación es hallar el valor de la incógnita.

En nuestro caso, tenemos

$$(-7)+x=12 \iff x=12-(-7)=12+7=19.$$

El número 19 se llama **raíz** o **solución** de la ecuación. Es el número que sustituido en lugar de la incógnita satisface a dicha ecuación.

EJEMPLOS. 1.° Resuelve la ecuación $x+(-3)=1$:

$$x+(-3)=1 \iff x=1-(-3)=1+3=4.$$

2.° Resuelve la ecuación $6-x=-8$:

$$6-x=-8 \iff x+(-8)=6 \iff x=6-(-8)$$

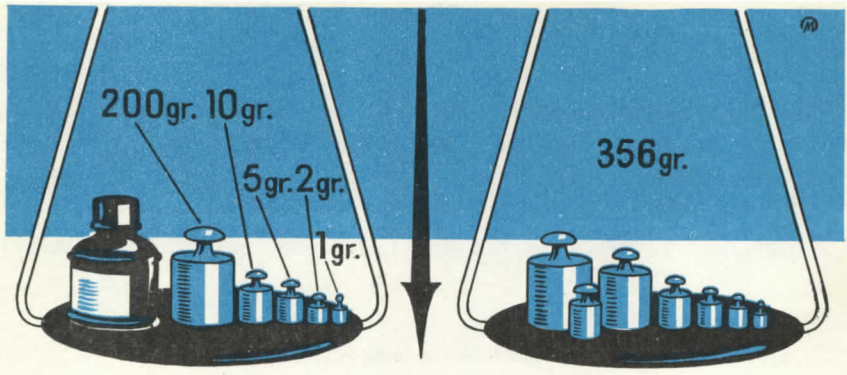
o sea

$$x=6+8=14.$$

Como ves, para resolver ecuaciones basta aplicar las equivalencias fundamentales.

50. Trasposición de términos.—Sea la igualdad

$$A-B=C$$



$$a + 218 = 356$$

donde A, B y C son números enteros.

Sabemos que la igualdad anterior equivale a

$$A = B + C$$

o también a

$$A - C = B.$$

Es decir, el número B, que estaba en el primer miembro restando, pasa al segundo sumando; y el número C, que está en el segundo miembro sumando, pasa al primer miembro restando.

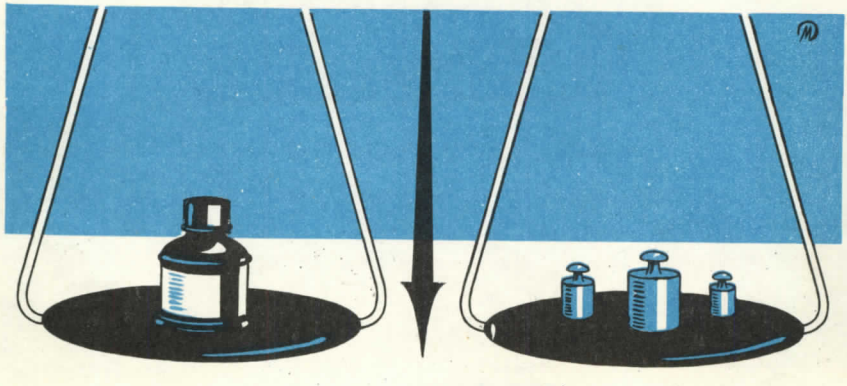
Esta operación de pasar un número de un miembro a otro se llama **trasposición de términos.**

En una igualdad se puede trasponer un término de un miembro a otro, cambiándole el signo que le precede.

EJEMPLOS. 1.º *Hallar el número a que sumado con* 218 *da* 356.

Solución: Esta pregunta puede expresarse por la igualdad

$$a + 218 = 356.$$



$$a = 138$$

Haciendo la trasposición del término 218, queda

$$a = 356 - 218 = \mathbf{138}.$$

Este ejemplo se puede hacer intuitivo mediante una balanza. Un tintero de peso a, más 218 gramos, equilibran a 356 gramos. Si quitamos 218 gramos en los dos platillos, el equilibrio no se alterará. En un platillo quedará sólo el tintero, y en el otro $356 - 218 = 138$ gramos. Luego $a = 138$ gramos.

2.° Resuelve la ecuación $12 = 7 - x$.

Trasponiendo x al primer miembro

$$12 + x = 7$$

y pasando 12 al segundo miembro

$$x = 7 - 12 = -5.$$

EJERCICIOS

1. Efectúa las sustracciones:

a) $(-8)-(-12)$;
b) $(+5)-(+6)$;
c) $(+15)-(-8)$;
d) $(-3)-(+6)$;
e) $(+4)-(+15)$;
f) $(-8)-(+4)$.

2. ¿Cuál es el número que sumado con (-5) da 7?

3. Sabiendo que la abscisa $ab=20$, $bc=15$, $cd=40$, $de=-12$, $ef=60$, $fg=-30$, halla la abscisa del punto g.

4. Deduce el valor de a dado por las siguientes igualdades:

a) $7-a=5$;
b) $a-8=25$;
c) $6-10=a-5$;
d) $a+10=31$;
e) $a+10=34$;
f) $12+a=-10$;
g) $-15+9=8-a$;
h) $25-a=16$.

5. El matemático griego Euclides murió el año 374 a. de J. C. ¿Cuánto tiempo ha transcurrido hasta el año 1968 desde la muerte del gran matemático?

6. ¿Qué propiedades se aplican en las siguientes transformaciones:

$$a+b+c+d=a+d+b+c=(a+d)+(b+c)?$$

7. ¿Qué número aumentado en 17 da 43?

8. ¿Qué número disminuido en 18 da -120?

9. Un jugador pasa de tener -58 ptas. a tener $+180$ ptas. ¿Cuánto ganó o perdió?

10. Completa las siguientes igualdades, y escribe de cada una las otras dos equivalentes:

a) $(+5)-(+2)=\ldots$;
b) $(-7)+(+6)=\ldots$;
c) $(+11)+(-5)=\ldots$;
d) $(-8)-(-9)=\ldots$;
e) $(+10)-(+3)=\ldots$;
f) $(-1)+(-4)=\ldots$

11

Sumas algebraicas

51. Polinomio aritmético.—En una adición de números enteros, como

$$[(+3)+(-4)]+[(-2)+(+5)]$$

sabemos (número 40) que podemos prescindir de los paréntesis, y escribir simplemente

$$(+3)+(-4)+(-2)+(+5).$$

Por comodidad en la escritura se ha convenido simplificar más todavía, del siguiente modo (núm. 47):

$$(+3)+(-4)+(-2)+(+5)=3-4-2+5$$

conviniendo:

1.° suprimir el signo predicativo + del primer número, siempre que sea positivo;

2.° que los demás signos sean operatorios.

3.° que estas operaciones se realicen en el mismo orden en que van apareciendo de izquierda a derecha.

Con estos convenios la expresión resultante

$$3-4-2+5$$

tiene un significado bien preciso, y se llama **polinomio aritmético.** Vale

$$3-4-2+5=-1-2+5=-3+5=2.$$

EJEMPLOS. 1.°

$$(+8)+(-5)+(-7)+(+12)+(-4)=8-5-7+12-4=$$
$$=3-7+12-4=-4+12-4=8-4=4.$$

2.°

$$(-9)+(+6)+(-11)+(+7)=-9+6-11+7=$$
$$=-3-11+7=-14+7=-7.$$

52. Suma algebraica.—Se llama **suma algebraica** o **suma algébrica** una serie de adiciones y sustracciones cuyos términos son números enteros. Por ejemplo

$$(-5)+(+2)-(-9)-(+3)+(-4).$$

Sabemos (número 46) que las sustracciones se pueden transformar en adiciones, y, por tanto, la suma algebraica se puede transformar en un polinomio aritmético así:

$$\begin{gathered}(-5)+(+2)-(-9)-(+3)+(-4)= \\ (-5)+(+2)+(+9)+(-3)+(-4)= \\ =-5+2+9-3-4=-3+9-3-4= \\ =6-3-4=3-4=-1.\end{gathered}$$

EJEMPLOS. 1.º $(+8)+(-2)-(+6)-(-12)=$

$$\begin{gathered}=(+8)+(-2)+(-6)+(+12)=8-2-6+12= \\ =6-6+12=12.\end{gathered}$$

2.º

$$\begin{gathered}(+3)-(-7)-(+5)=(+3)+(+7)+(-5)= \\ =3+7-5=10-5-5.\end{gathered}$$

53. Paréntesis precedido del signo más.—En Primer Curso demostramos que

$$a+(b-c)=(a+b)-c=a+b-c.$$

Con el convenio anterior se puede prescindir del paréntesis. De un modo general convenimos que

$$a+(b-c+d-f)=a+b-c+d-f.$$

Al suprimir un paréntesis precedido del signo + se conservan los signos a todos los términos que encierra.

EJEMPLOS. 1.º $10+(7-5+4)=10+7-5+4=$

$$=17-5+4=12+4=16.$$

2.º

$$\begin{gathered}(2+7)+(8-6-1)=2+7+8-6-1= \\ 9+8-6-1=17-6-1=11-1=10.\end{gathered}$$

54. Paréntesis precedido del signo menos.—En Primer Curso vimos que

$$a-(b-c)=(a-b)+c=a-b+c$$
$$a-(b+c)=(a-b)-c=a-b-c$$

prescindiendo del paréntesis en virtud del convenio anterior.

De un modo general convenimos que

$$a-(b-c+d-f)=a-b+c-d+f.$$

Al suprimir un paréntesis precedido del signo menos se deben cambiar los signos de todos los términos que encierra.

EJEMPLOS. 1.º $10-(6-4+3)=10-6+4-3=$
$=4+4-3=8-3=5.$

2.º
$$(9+3-4)-(6-5+2)=9+3-4-6+5-2=$$
$$=12-4-6+5-2=8-6+5-2=$$
$$=2+5-2=7-2=5.$$

EJERCICIOS

1. Calcula los valores de las sumas algebraicas siguientes, reduciéndolas previamente a polinomios aritméticos:

a) $(-5)-(-3)-(+7)$;
b) $(-12)-(-18)+(-21)$;
c) $(-9)+(-14)-(-23)+(+6)-(+8)$;
d) $(-5)-(-11)-(+16)+(-30)+(+4)$;
e) $(+13)-(-8)+(-4)+(+14)-(+23)$.

2. Calcula: 1.º hallando la suma representada por cada paréntesis; 2.º suprimiendo primero los paréntesis:

a) $(5-2+8-1)+(-8+5-2)-(-3-9+5)$;
b) $(7-14+22)-(-12+25-104)+(225-153)$;
c) $(4-2-6)-(6-4+2)-(-7+1+4)$.

3. Calcula los valores de:

a) $[(-5)+(-7)]+[-4-(-8)]$;
b) $6+[(-3)+(-8)+(-5)]$;
c) $\{[(-5)-7]-9\}-4$;
d) $[\{7-(-3)\}+(-9)]-(-8)$;
e) $\{(-4)+[-(-7)]\}-[(-5)+(-9)]$;
f) $\{[7-(-8)]-(-5)\}+\{(-12)+[(-2)-3]\}$.

4. Calcula A en
$$A+[(-6)-(-9)]=7.$$

5. Calcula B en
$$(-5)+[B-3]=-8.$$

6. Calcula C en

$$7-[(-5)-C]=-4.$$

7. Calcula el valor de las sumas siguientes:

a) $(-10)+(-15)-(-35)+(+9)-(+14)$;
b) $(-8)-(+16)-(-10)+(-40)+(+1)$;
c) $(+45)-(-60)+(-5)-(+6)$;
d) $(-8)-(-9)+(-11)-(+6)$.

8. Quita paréntesis y halla el valor numérico de los polinomios aritméticos que resultan:

a) $(7-3+5-1)+(-11+4-1)-(-5-3+2)$;
b) $(-12+8-2)+(6-7-9)-(-4+5+9)$;
c) $[(6-10)+(2-5)]-[(7+3-5)-(8-11)]$;
d) $[14-(12-5-5)]+[-15+(4-3)]$;
e) $(6-8+4)+(-9-14-1)+(+5-4-7)$;
f) $(12-8+5)-(-17+6-8)+(7-5)$.

9. Deduce el valor de a dado por las siguientes igualdades:

a) $7-(3-a)=5$;
b) $a-(8-10)=25$;
c) $6-(10+4)=a-5$;
d) $a+10=24-31$;
e) $a+(10-2a)=34$;
f) $12+(a-5)=-(10-15)$;
g) $-(15-61+9)=8-a$;
h) $25-a=16-9$.

10. Calcular x en

$$\{4+[(-x)-2]\}+(-8)=-6$$

11. Un señor sale de paseo con 300 ptas. en la cartera. Da 150 a un necesitado; luego recibe 75. Por faltar a la ley de la circulación tiene que pagar 100 ptas. Por fin se encuentra con su señora que le entrega 50 ptas. ¿Cuántas pesetas le quedan al señor?

$$A=\{[(300-150)+75]-100\}+50$$

12. Un ciclista corre por carretera de montaña; primero sube una cuesta de 500 m de altura, baja por el lado opuesto 400 m, sube luego otra cuesta de 300 m de altura y cuando la baja se encuentra 100 m más bajo que en el punto de partida. ¿Qué altura bajó en la segunda cuesta?

$$\{[(500-400)+300]-H\}=-100$$

13. De un depósito que tiene 800 litros de agua se sacan 200 litros, mientras tanto el depósito recibe 150 litros. Después se sacan 300 litros mientras el depósito recibe A litros, siendo el contenido final del depósito 900 litros. ¿Cuánto vale A?

$$\{[(800-200)+150]-300\}+A=900$$

14. Dadas las igualdades:

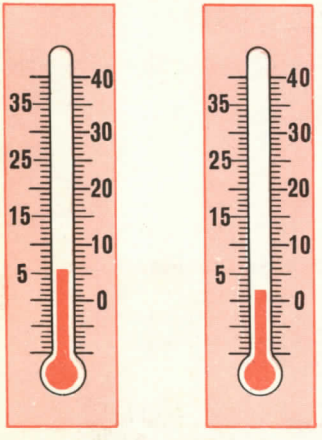
1.ª $\quad A+[(-5)+(-7)]=20$
2.ª $\quad [(A-8)+6]-2=-15$

escribe el enunciado de un problema para cada una de ellas, de modo que el planteo coincida con las igualdades propuestas.

15. Un señor se pasea por una calle. Anda 370 metros en un sentido, a continuación anda 735 metros en el sentido contrario, después cambia otra vez de sentido y camina 100 metros, vuelve a cambiar al sentido

contrario caminando 250 metros. Cuando termina el paseo anterior, ¿a cuántos metros está del punto de partida y en qué sentido?

16. Una empresa comercial ha tenido un beneficio en el año actual de 3 millones de pesetas. Se desea saber cuál fue su balance en el año anterior sabiendo que en conjunto, en los dos años últimos, ha tenido una pérdida de 2 millones de pesetas.



17. Un día el termómetro ha marcado 6 grados, al día siguiente bajó cierto número de grados y al siguiente subió 9 grados, después de lo cual el termómetro marcaba 2 grados. ¿Cuántos grados bajó el segundo día de observación?

18. Calcula el valor de A en

$$\{2+[(-A)-1]\}+(-6)=-5$$

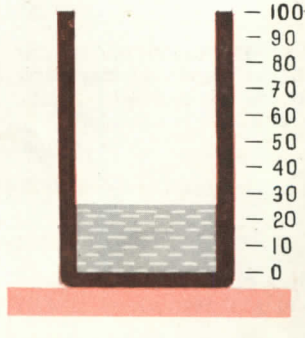
19. Dada la igualdad

$$[(-6)+5]-8=A$$

Pon un problema cuyo planteo dé lugar a ella.

20. Un ciclista recorre por una carretera 20 kilómetros en un sentido, después vuelve y recorre en sentido contrario una cierta longitud, a continuación vuelve y recorre en el mismo sentido que al principio 5 kilómetros. Después de estos recorridos ha resultado que se encuentra a 7 kilómetros del punto de partida y en sentido opuesto al de partida. Plantea el problema en términos matemáticos y calcula cuántos kilómetros recorrió la segunda vez.

21. Un depósito tenía 100 litros de agua. A continuación se han sacado un cierto número de litros de agua y después se han echado



20 litros. Después de estas manipulaciones resulta que el depósito tiene 25 litros. Plantea el problema anterior y calcula el agua que se sacó.

12

Ordenación de los números enteros

55. Desigualdad de números enteros.—Sean dos números enteros A y B. Si $A - B$ es negativo, diremos que A **es menor que** B, y escribiremos

$$A < B$$

Si $A - B$ es positivo, diremos que A **es mayor que** B, y escribiremos

$$A > B$$

Si $A - B$ es nulo, diremos que A **es igual a** B, escribiendo

$$A = B$$

Cuando A **es menor o igual a** B se escribe

$$A \leqslant B$$

56. Consecuencias. 1.° Es evidente que si un avión vuela a 800 m de altura y otro a 650 m, el primero vuela a *mayor* altura, o sea que

$$800 > 650$$

En efecto,

$$800 - 650 = 150$$

Siendo la diferencia positiva, el minuendo es mayor que el sustraendo, según la definición anterior.

Es decir: *de dos números positivos es mayor el de mayor valor absoluto.*

2.º También es evidente que el marinero que opera sobre la cubierta del buque a 3 m sobre el nivel del mar, está *más alto* que el buzo que trabaja sumergido a 4 m bajo la superficie de las aguas, o sea que

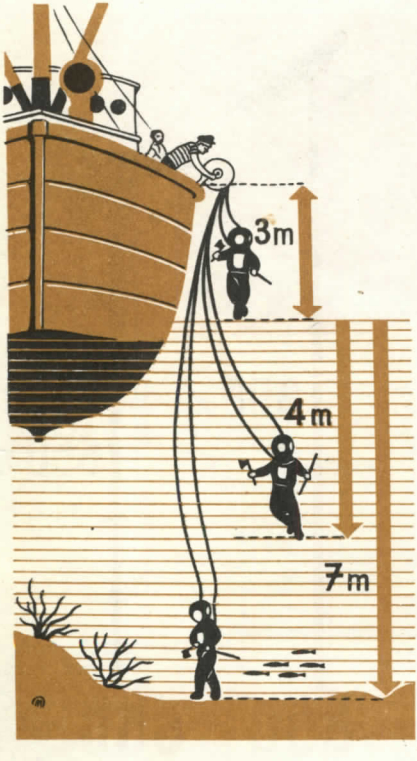
$$3 > -4$$

porque

$$3-(-4)=3+(+4)=+7.$$

Diremos que: *todo número positivo es mayor que cualquier número negativo.*

3.º Igualmente, el buzo que se encuentra justamente al nivel del mar está a *mayor* altura que el que se halla 7 m bajo el mismo; es decir,



$$0 > -7$$

porque

$$0-(-7)=0+(+7)=+7.$$

Por tanto: *el cero es mayor que cualquier número negativo.*

4.º Por último, es claro que el buzo que trabaja a 4 m bajo el nivel del mar está *más* alto que el que se halla a 7 m bajo el mismo, o sea que

$$-4 > -7$$

porque

$$(-4)-(-7)=-4+7=3.$$

Es decir: *de dos números negativos es mayor el que tiene menor valor absoluto.*

Si representamos sobre un eje estos números enteros, observaremos fácilmente que se cumple la siguiente regla general:

Un número es mayor que otro si el punto representativo del primero está a derecha del correspondiente al segundo.

Para indicar que un número A es positivo escribiremos

$$A > 0$$

ya que todo número mayor que cero es positivo. Y para indicar que un número B es negativo escribiremos

$$B < 0$$

pues todo número menor que cero es negativo.

EJERCICIOS

1. Compara los números enteros siguientes:

a) $+3$ y -7; $+1$ y -7; $+5$ y 0; 0 y -7;
b) $+9$ y $+6$; -4 y -7; -3 y -8; -1 y -3;
c) $+4$ y $+3$; -3 y -5; -4 y -17; 5 y 15.

2. ¿Cuáles son los números x que verifican a la vez las dos desigualdades $x < 4$ y $x < -2$? Interpretación gráfica. Compara la posición sobre un eje, del punto P de abscisa x respecto a los puntos de abscisas $+3$ y -1.

3. ¿Cuáles son los números x que verifican a la vez las dos desigualdades $x < -1$ y $x < -4$? Interpretación gráfica.

4. ¿Hay números x que verifican a la vez las dos desigualdades $x > 0$ y $x < -3$? Interpretación gráfica.

5. Clasifica por orden de menor a mayor los números

a) 3, -3, 4 y -4;
b) 7, -8, 5, -10 y 6;
c) 12, -1, 9, 6 y -4.

6. Clasifica por orden de mayor a menor los números

a) 8, 12, -5 y -3;
b) -6, 15, 3 y -8;
c) 16, -2, -10, 11 y -9.

7. Calcula

$$(-2)-(-7); \quad (+3)-(+7); \quad (-8)-(+4)$$

y establece la relación de desigualdad entre minuendo y sustraendo.

8. ¿Qué resulta si a los dos miembros de la desigualdad $-5 > -7$ se suma el número -3?

9. ¿Qué resulta si se suman miembro a miembro las dos desigualdades $8 < 12$, $-3 < -1$?

10. ¿Qué resulta si se resta el número -5 a los dos miembros de la desigualdad $-8 < -5$?

11. ¿Qué resulta si de los dos miembros de la igualdad $10=10$ restamos, respectivamente, los de la desigualdad $-6<-4$?

12. Basándote en las definiciones del número 30 (lección 7) halla la medida algebraica de los segmentos orientados determinados por los siguientes pares de abscisas:

a) $a=-4$; $b=1$;
b) $a=5$, $b=-7$;
c) $a=-6$, $b=-8$;
d) $a=3$, $b=2$.

Di en cada caso si los segmentos son positivos o negativos.

13. La medida algebraica de un segmento es -6 y la abscisa del origen es $a=-4$. ¿Cuál es la abscisa b del extremo? (consulta el núm. 30, lección 7).

14. La medida algebraica de un segmento es 5 y la abscisa del extremo es $b=7$. ¿Cuál es la abscisa a del origen?

15. Halla la abscisa del punto medio de los segmentos orientados cuyos extremos tienen por abscisas:

a) $a=-8$, $b=8$;
b) $a=5$, $b=7$;
c) $a=-4$, $b=-6$;
d) $a=1$, $b=5$.

13

Multiplicación de números enteros

57. Multiplicación de pares.—1.er Caso. *Que los primeros elementos sean mayores que los segundos elementos de los pares.*

Multiplica $(7, 4) \times (8, 5)$.

Solución. Emplearemos la identificación del núm. 47:

$$(7, 4) \times (8, 5) = (7 - 4) \times (8 - 5).$$

Las dos diferencias son números naturales; por tanto, se les puede aplicar la propiedad distributiva de tales números

$$\begin{aligned}(7-4) \times (8-5) &= 7 \times (8-5) - 4 \times (8-5) \\ &= (7 \times 8 - 7 \times 5) - (4 \times 8 - 4 \times 5) \\ &= 7 \times 8 - 7 \times 5 - 4 \times 8 + 4 \times 5 \\ &= (7 \times 8 + 4 \times 5) - (7 \times 5 + 4 \times 8)\end{aligned}$$

Se han aplicado también las propiedades de la supresión de paréntesis (núms. 53 y 54).

Es decir, *el producto de dos pares es otro par cuyo primer elemento es la suma de los productos de los primeros elementos y de los segundos elementos, y el segundo elemento del producto es la suma de los productos del primer elemento de cada factor por el segundo del otro.*

O sea

$$(7, 4) \times (8, 5) = (7 \times 8 + 4 \times 5,\ 7 \times 5 + 4 \times 8)$$

2.° Caso. *Que los primeros elementos de los pares ordenados sean menores que los segundos elementos.*

Por ejemplo, multiplicar los pares $(3, 7) \times (5, 9)$. En este caso no se puede hacer el desarrollo como en el ejemplo anterior, porque $3 - 7$ y $5 - 9$ no son números naturales. Pero *convenimos "por definición" la regla anterior.* O sea

$$(3, 7) \times (5, 9) = (3 \times 5 + 7 \times 9,\ 3 \times 9 + 7 \times 5)$$

y, en general, cualesquiera que sean los números naturales a, b, c y d, se tiene, por definición

$$(a, b) \times (c, d) = (a \times c + b \times d,\ a \times d + b \times c)$$

no

58. Propiedad uniforme del producto de clases de pares.—Sean los pares iguales

$$(2, 5) = (1, 4)$$
$$(7, 4) = (9, 6)$$

Multipliquemos los primeros miembros:

$$(2, 5) \times (7, 4) = (2 \times 7 + 5 \times 4, 2 \times 4 + 5 \times 7) = (34, 43) \qquad (1)$$

Multipliquemos los segundos miembros:

$$(1, 4) \times (9, 6) = (1 \times 9 + 4 \times 6, 1 \times 6 + 4 \times 9) = (33, 42) \qquad (2)$$

Veamos si ambos productos son iguales; para ello apliquemos la condición de la igualdad de pares:

$$(34, 43) = (33, 42) \iff 34 + 42 = 43 + 33 \iff 76 = 76$$

Esto quiere decir que *si se multiplican miembro a miembro dos igualdades de pares resultan pares iguales.*

Lo que hemos comprobado con los pares dados puede hacerse igualmente con todos los de sus clases respectivas, que son los números enteros -3 y $+3$, es decir con

$$-3 = \{(0, 3),\ (1, 4),\ (2, 5),\ (3, 6),\ (4, 7), \ldots\}$$
$$3 = \{(3, 0),\ (4, 1),\ (5, 2),\ (6, 3),\ (7, 4), \ldots\}$$

En general, si

$$(a, b) = (a', b')$$
y
$$(c, d) = (c', d')$$

es

$$(a, b) \times (c, d) = (a', b') \times (c', d')$$

o sea

$$(a \times c + b \times d, a \times d + b \times c) = (a' \times c' + b' \times d', a' \times d' + b' \times c').$$

Como ejercicio, comprueba que $(1, 5) = (3, 7)$ y $(2, 4) = (6, 8)$ y que $(1, 5) \times (2, 4) = (3, 7) \times (6, 8)$.

59. Multiplicación de números enteros.—*Sea multiplicar el número entero -4 por el número entero 7.*

Para ello se elige un par ordenado representante de -4 y otro de 7. Por ejemplo

$$(1, 5) \in -4 \quad \text{y} \quad (9, 2) \in 7$$

Se multiplican los pares representantes elegidos:

$$(1, 5) \times (9, 2) = (1 \times 9 + 5 \times 2, 1 \times 2 + 5 \times 9) = (19, 47)$$

El producto obtenido $(19, 47)$ pertenece al número entero -28:

$$(19, 47) \in -28$$

El número entero -28 se llama *producto* de -4 por 7 y se representa así:

$$(-4) \times 7 = -28.$$

Al número -4 se le llama *multiplicando*, a 7 *multiplicador* y a ambos, *factores* del producto.

EJEMPLOS. 1.º Efectúa el producto $(-3) \times (-5)$ tomando primero como pares representantes $(1, 4) \in -3$ y $(2, 7) \in -5$ y después tomando como pares representantes $(2, 5) \in -3$ y $(3, 8) \in -5$. Verás que se obtiene el mismo producto, $+15$.

2.º Efectúa el producto $(-4) \times (-6)$ tomando primero como pares representantes $(3, 7) \in -4$ y $(2, 8) \in -6$ y después tomando como pares representantes $(1, 5) \in -4$ y $(3, 9) \in -6$. Verás que se obtiene el mismo producto.

Ya que el producto no depende de los pares representantes elegidos, tomaremos en adelante pares canónicos para multiplicar números enteros. Así:

3.º Multiplica $(-5) \times (-8)$ empleando pares canónicos.

$$\begin{array}{rl} -5 & \longrightarrow (0, 5) \\ -8 & \longrightarrow (0, 8) \\ \hline (-5) \times (-8) = 40 & \longleftarrow (0, 5) \times (0, 8) = (5 \times 8, 0) \end{array}$$

Por tanto,

$$(-5) \times (-8) = +40$$

60. Casos que pueden presentarse en la multiplicación de números enteros.—Efectuemos *los cuatro productos siguientes:*

a) 3×5; b) -3×5; c) $3 \times (-5)$; d) $(-3) \times (-5)$

Soluciones:

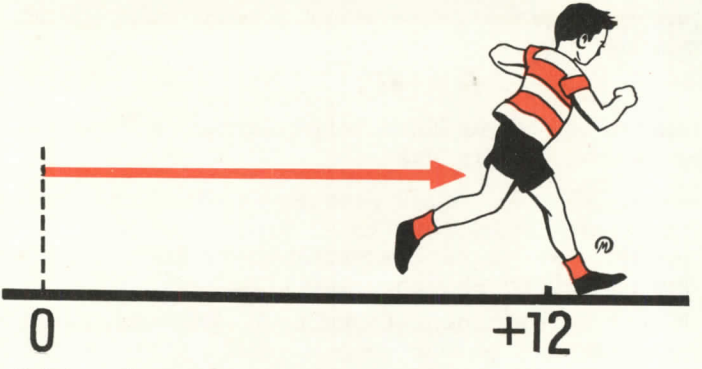
a) $3 \times 5 \longrightarrow (3, 0) \times (5, 0) = (3 \times 5, 0) = (15, 0) \longrightarrow +15$
luego $3 \times 5 = 15$.

b) $(-3) \times 5 \longrightarrow (0, 3) \times (5, 0) = (0, 3 \times 5) = (0, 15) \longrightarrow -15$
luego $(-3) \times 5 = -15$.

c) $3 \times (-5) \longrightarrow (3, 0) \times (0, 5) = (0, 3 \times 5) = (0, 15) \longrightarrow -15$
luego $3 \times (-5) = -15$.

d) $(-3) \times (-5) \longrightarrow (0, 3) \times (0, 5) = (3 \times 5, 0) = (15, 0) \longrightarrow 15$
luego $(-3) \times (-5) = 15$.

EJEMPLOS. 1.º *Luis sale de un punto O y corre hacia la derecha con una velocidad de 4 m/s. ¿A qué distancia de O se encontrará después de 3 segundos de salir de O?*



Por dirigirse hacia la derecha, la velocidad de Luis es $+4$, y el tiempo transcurrido $+3$ (por ser *después* del instante inicial). Luego habrá recorrido $(+4)\cdot(+3)=12$ m hacia la derecha, es decir, $+12$ m. Podemos decir:

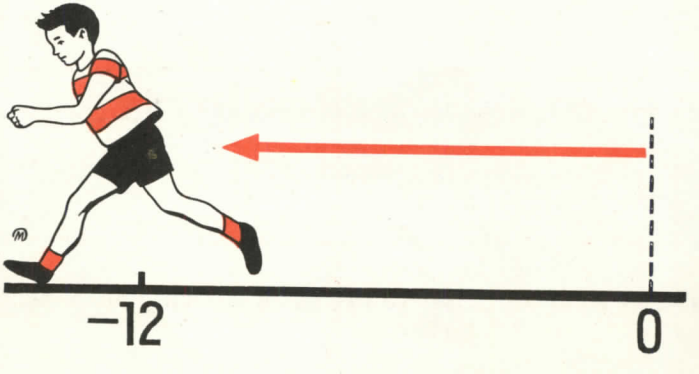
$$(+4)\cdot(+3)=+12.$$

2.º *Resolver el mismo problema anterior, si Luis corre hacia la izquierda.*

Ahora la velocidad es -4, por dirigirse a la izquierda, y el tiempo $+3$. La distancia recorrida es $(-4)\cdot(+3)=12$ m hacia la izquierda, esto es, -12. Luego puede escribirse:

$$(-4)\cdot(+3)=-12.$$

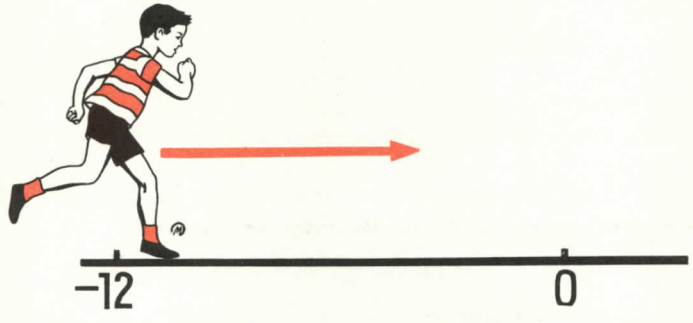
3.º *Si en el ejemplo 1.º Luis venía corriendo desde la izquierda hacia O, ¿en qué posición se encontraba 3 segundos antes de pasar por O?*



La velocidad es $+4$, por dirigirse hacia la derecha, y el tiempo -3, por ser un instante anterior al instante inicial. La distancia es $(+4)\cdot(-3)=12$ m a la izquierda de O, o sea, a -12 m de O.

Se escribe:

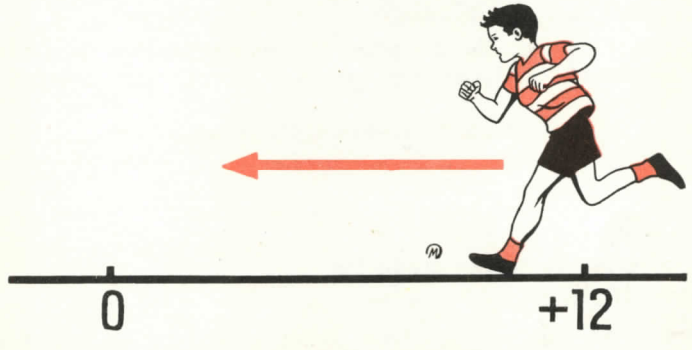
$$(+4)\cdot(-3)=-12.$$



4.º *Si en el ejemplo 2.º Luis venía corriendo desde la derecha hacia O, ¿en qué posición se encontraba 3 segundos antes de pasar por O?*

Ahora la velocidad es -4 y el tiempo -3. La posición 12 m a la derecha, o sea, $+12$ m. Luego

$$(-4)\cdot(-3)=+12.$$



61. Regla de los signos.—Las precedentes conclusiones pueden resumirse así: *El producto de dos números enteros es un número entero. El valor absoluto del producto es el producto de los valores absolutos de los dos factores.*

El producto es positivo si los dos factores tienen el mismo signo. El producto es negativo si los dos factores tienen signos contrarios.

Esto se resume en la siguiente *"regla de los signos"*:

$$+ \times + = + ; \qquad - \times + = - ;$$
$$+ \times - = - ; \qquad - \times - = + .$$

EJEMPLOS. 1.º *Un peón gana* 100 *ptas. diarias. ¿Cuánto ganará en* 30 *días?*

Solución:

$$100 \times 30 = 3000 \text{ ptas.}$$

2.º *Si un peón gana* 100 *ptas. diarias y deja de trabajar* 3 *días, ¿cuánto pierde?*

Solución. Los tres días que el peón deja de trabajar se puede representar por -3. Luego la pérdida es

$$100 \times (-3) = -300 \text{ ptas.}$$

3.º *Cierto tren disminuye su velocidad en* 3 *km/s. ¿Cuánto disminuirá su velocidad en* 12 *s?*

Solución. Una disminución de velocidad de 3 km/s se puede representar por -3. Luego la velocidad perdida es

$$(-3) \cdot 12 = -36 \text{ km}$$

4.º *Un aficionado al fútbol gasta* 25 *ptas. en cada partido. Si deja de asistir a* 5 *partidos, ¿cuántas ptas. ahorra?*

Solución: El gasto de 25 ptas. lo representamos por -25 y la falta de asistencia a 5 partidos por -5. Luego las pesetas ahorradas son

$$(-25) \times (-5) = +125 \text{ ptas.}$$

EJERCICIOS

1. Efectúa los siguientes productos:

a) $(-4) \times (+6)$; b) $(+2) \times (-3)$; c) $(-3) \times (-5)$.

2. Comprueba que con números enteros son ciertas las igualdades:

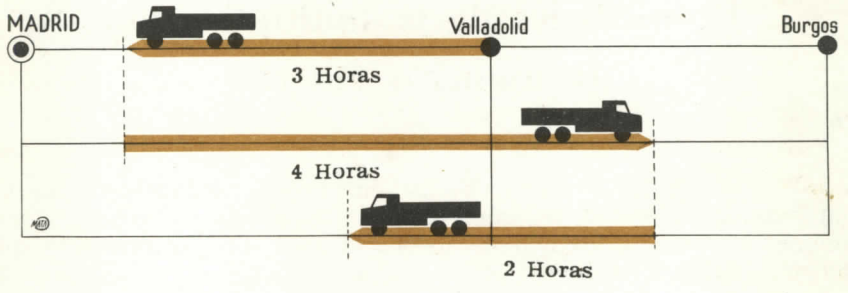
a) $4 \times 3 = 4 + 4 + 4$.
b) $(-5) \times 3 = (-5) + (-5) + (-5)$.
c) $4 \times (-6) = (-6) + (-6) + (-6) + (-6)$.

3. Un depósito de agua pierde 1 litro de agua por segundo durante 5 segundos. ¿Cuánto agua ha perdido durante dicho tiempo?

4. El contador de velocidad de un avión indica 600 km/h, pero el viento que le da de cabeza tiene una velocidad de 50 km/h. ¿Cuál es la

velocidad que realmente lleva el avión? ¿Cuánto avanzaría el avión en 4 horas?

5. Un camión sale de Valladolid hacia Madrid. Al cabo de 3 horas, vuelve hacia Valladolid y continúa hacia Burgos durante 4 horas. Finalmente, regresa a Madrid durante 2 horas. Indica la posición final, sabiendo que la velocidad del camión es de 50 km/h.



6. Calcula el número x definido por la fórmula $x=a\times b$, sabiendo que

1.º $a=-3$, $b=7$;
2.º $a=-5$, $b=-6$;
3.º $a=+4$, $b=+9$;
4.º $a=+2$, $b=-1$.

7. Calcula:

a) $(-3)\cdot(-5)+(-1)\cdot(+3)$;
b) $(+2)\cdot(-7)-(+8)\cdot(-3)$;
c) $(+4)\cdot(-6)+(+1)\cdot(-9)-(-5)\cdot(-1)$.

8. Calcula el número $N=x\cdot y-u\cdot v$, sabiendo que

$$x=+11, \quad y=-8, \quad u=-6, \quad z=-15.$$

9. Halla el número A definido por la expresión

$$A=2(x-y)+3(x-z)$$

siendo $x=-7$, $y=+2$, $z=-1$.

10. Halla el valor numérico de la expresión

$$12\,(x+y)-x\cdot y$$

para $x=+12$, $y=-25$.

14

Propiedades de la multiplicación de números enteros

62. Uso del paréntesis.—Ya sabemos que el paréntesis es un mandato de prioridad, e indica, por tanto, que la operación u operaciones encerradas dentro de los paréntesis son las primeras que hay que realizar. Así:

a) $[5 \times (-6)] \times (-3) = (-30) \times (-3) = 90.$
b) $4 \times [(-2) \times 3] = 4 \times (-6) = -24.$
c) $[7 \times (-3)] \times [(-4) \times 2] = (-21) \times (-8) = 168.$
d) $\{4 \times [(-5) \times (-2)]\} \times [(-3) \times 4] = (4 \times 10) \times (-12) = -480.$

63. Propiedad asociativa de la multiplicación de enteros.—Comprueba que

$$[(-4) \times 2] \times (-3) = (-4) \times [2 \times (-3)] \qquad (1)$$

Solución. Efectuemos por separado ambos miembros:

$$[(-4) \times 2] \times (-3) = (-8) \times (-3) = 24$$
$$(-4) \times [2 \times (-3)] = (-4) \times (-6) = 24$$

Luego es cierta la igualdad (1).

Esta es la **propiedad asociativa** de la multiplicación de números enteros.

EJEMPLOS. 1.° Demuestra la propiedad anterior tomando elementos canónicos:

Sean los números enteros A, B y C, de modo que

$$(a, 0) \in A; \quad (b, 0) \in B; \quad (0, c) \in C.$$
$$(A \times B) \times C \longrightarrow [(a, 0) \times (b, 0)] \times (0, c) = (a \times b, 0) \times (0, c) = [0, (a \times b) \times c];$$
$$[0, (a \times b) \times c] = [0, a \times (b \times c)] = (a, 0) \times [(b, 0) \times (0, c)] \longrightarrow A \times (B \times C).$$

Sean los números enteros A, B y C, de modo que

$$(a, 0) \in A; \quad (b, 0) \in B; \quad (0, c) \in C.$$

$$(A \times B) \times C \longrightarrow [(a, 0) \times (b, 0)] \times (0, c) = (a \times b, 0) \times (0, c) = [0, (a \times b) \times c];$$

$$[0, (a \times b) \times c] = [0, a \times (b \times c)] = (a, 0) \times [(b, 0) \times (0, c)] \longrightarrow A \times (B \times C).$$

Por cada flecha y por cada signo igual escribe la propiedad que has aplicado.

2.° Sustituye las letras por números para que se verifiquen las igualdades siguientes:

a) $[(-3) \times 4] \times A = (-3) \times [4 \times (-5)]$

b) $[(-3) \times (-5)] \times A = (-3) \times [(-5) \times A]$

c) $[(-4) \times A] \times B = (-4) \times [A \times B]$

d) $[A \times B] \times C = A \times [B \times C]$.

64. Propiedad conmutativa.—Comprueba que

$$(-5) \times 8 = 8 \times (-5).$$

Solución:

$$(-5) \times 8 \longrightarrow (0, 5) \times (8, 0) = (0, 5 \times 8) = (0, 40) = -40$$

$$8 \times (-5) \longrightarrow (8, 0) \times (0, 5) = (0, 8 \times 5) = (0, 40) = -40.$$

Esta es la **propiedad conmutativa** de la multiplicación de números, que dice: **El orden de los factores no altera el valor del producto.**

EJEMPLOS. 1.° Demuestra la propiedad anterior mediante los elementos canónicos.

Sean los números enteros A y B tales que $(a, 0) \in A$ y $(0, b) \in B$.

$$A \times B \longrightarrow (a, 0) \times (0, b) = (0, a \times b) = (0, b \times a) = \\ = (0, b) \times (a, 0) = B \times A.$$

Por cada flecha y por cada signo igual escribe la propiedad que has aplicado.

2.° En las igualdades siguientes sustituye las letras por números de modo que aquéllas se verifiquen:

a) $(-4) \times 3 = A \times (-4)$.

b) $(-7) \times B = B \times (-7)$.

c) $A \times B = B \times A$.

65. Producto de varios factores.—Si aplicamos sucesivamente las propiedades asociativa y conmutativa al producto de tres factores A, B y C, veremos que en cualquier orden y forma en que efectúe, se obtiene el mismo resultado siempre. Luego dicho producto puede escribirse sin necesidad de paréntesis, simplemente así:

$$A \cdot B \cdot C.$$

Lo mismo sucede con un producto cualquiera de factores.

EJEMPLOS. 1.° El producto

$$(-2) \times (-6) \times (+7) \times (-1)$$

se calcula diciendo:

$$(-2) \times (-6) = +12; \qquad (+12) \times (+7) = +84;$$
$$(+84) \times (-1) = -84.$$

De aquí resulta que el valor absoluto del producto es el producto de los valores absolutos de los factores. Por otra parte, en el cálculo de los productos sucesivos, el producto cambia de signo cuando se encuentra un factor negativo, y no cambia de signo cuando se encuentra un factor positivo. Luego para prever el signo del producto buscado sólo nos interesa el número de factores negativos; es decir:

El producto será positivo si el número de factores negativos es par o nulo; y será negativo si el número de factores negativos es impar.

2.° $(-4) \times (+3) \times (-3) \times (-2{,}5) \times (-1) = 90.$
3.° $(-4) \times (-3) \times (-3) \times (-2{,}5) \times (-1) = -90.$

66. Semigrupo multiplicativo.—Todo conjunto entre cuyos elementos se puede definir una operación análoga a la multiplicación, que tenga las dos propiedad, uniforme y asociativa, decimos que tiene **estructura de semigrupo multiplicativo,** o simplemente que es un **semigrupo multiplicativo.** Y si, además, tiene la propiedad conmutativa, diremos que es un **semigrupo multiplicativo conmutativo.** Por tener las propiedades anteriores, podemos asegurar que el conjunto Z de los números enteros tiene la estructura de **semigrupo multiplicativo.**

Además, este semigrupo es conmutativo.

67. Elemento neutro de la multiplicación.—Efectuemos el producto:

$$(-5)\times 1 \longrightarrow (0,5)\times(1,0)=(0,5\times 1)=(0,5)=-5.$$

Es decir, el producto de un número por 1 *da el mismo número.* Por eso el 1 se llama **elemento neutro de la multiplicación.**

EJEMPLOS. 1.° Demuestra la propiedad anterior de una manera general.

Sea A un número entero y $(a, 0)$ su representante canónico. Luego,

$$A\times 1 \longrightarrow (a.\,0)\times(1,0)=(a\times 1,0)=(a,0)\longrightarrow A.$$

Si un representante de A fuera $(0, a)$ se tiene

$$A\times 1 \longrightarrow (0,a)\times(1,0)=(0,a\times 1)=(0,a)=A.$$

Luego siempre se tiene:

$$A\times 1=A.$$

2.° Estudiemos el caso de $A\times(-1)$:

$$A\times(-1)\longrightarrow (a,0)\times(0,1)=(0,a\times 1)=(0,a)\longrightarrow -A$$

Luego este producto es igual al opuesto $-A$ del número A:

$$A\times(-1)=-A$$

68. Propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la adición.—Comprueba la igualdad

$$[(-4)+(-3)]\times 5=(-4)\times 5+(-3)\times 5$$

Solución: Operando con el primer miembro se tiene:

$$[(-4)+(-3)]\times 5=[-(4+3)]\times 5=-[(4+3)\times 5]$$
$$=-(7\times 5)=-35.$$

Operando con el segundo miembro

$$(-4)\times 5+(-3)\times 5=[-(4\times 5)]+[-(3\times 5)]=$$
$$=(-20)+(-15)=-[20+15]=-35.$$

Por cada signo igual escribe la propiedad que has aplicado.

Se llama **propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la adición** la expresada por la igualdad

$$(A+B)\times C=A\times C+B\times C \qquad (2)$$

REGLA: *El producto de una suma de varios números enteros por un número entero es igual a la suma de los productos parciales obtenidos multiplicando sucesivamente cada término de la suma por el número.*

69. Sacar factor común.—La expresión (2) se puede leer comenzando por el segundo miembro:

$$A\times C+B\times C=(A+B)\times C$$

En el primer miembro, cada término contiene el factor C; en el segundo miembro, C multiplica a una suma de números enteros. Se dice que *se ha sacado C factor común,* o que *se ha puesto la suma en forma de producto.*

EJEMPLOS. 1.° Calcula de dos maneras diferentes:

$$(-4+3-5+1)\times(-2)$$

$$(-5)\times(-2)=+10;\quad (-4)\times(-2)+3\times(-2)-5\times(-2)+1\times(-2)=$$

$$=+8+(-6)+10-2=+10$$

2.° Calcula después de haber sacado factor común $(+7)$ en la suma:

$$22\times 7+7\times 105-7\times 41-8\times 7$$

$$(22+105-41-8)\times 7=78\times 7=546$$

70. Multiplicación de dos sumas algebraicas.—Sea calcular el producto

$$P=(A-B+C)\,(D-E)$$

Si consideramos la suma $S=A-B+C$, como efectuada, se puede escribir

$$P=S\cdot(D-E)$$

y aplicando la regla anterior, se tiene:

$$P=S\cdot D-S\cdot E$$

Pero

$$S \cdot D = (A - B + C) \cdot D = A \cdot D - B \cdot D + C \cdot D$$
$$S \cdot E = (A - B + C) \cdot E = A \cdot E - B \cdot E + B \cdot E$$

Luego

$$P = A \cdot D - B \cdot D + C \cdot D - A \cdot E + B \cdot E - C \cdot E$$

REGLA: *El producto de dos sumas algebraicas es igual a la suma de los productos obtenidos multiplicando sucesivamente cada uno de los términos de la primera por cada uno de los términos de la segunda.*

EJEMPLO. Calcular el producto

$$P = (-7 + 13 - 8)(4 - 9). \quad (1)$$
$$P = -7 \times 4 + 13 \times 4 - 8 \times 4 + 7 \times 9 - 13 \times 9 + 8 \times 9 \quad (2)$$

En el momento de multiplicar (-7) por (-9) hemos escrito 7×9; del mismo modo, para $(-8) \times (-9)$.

Como ejercicio comprueba que el cálculo de P en la forma (2) conduce al mismo resultado que el cálculo de P en la forma (1).

$$-7 + 13 - 8 = -2; \quad 4 - 9 = -5; \quad P = +10$$

EJERCICIOS

1. Calcula: 1.º haciendo de cada paréntesis un solo número; 2.º suprimiendo primero los paréntesis y después asociando los términos que den un resultado sencillo:

   a) $(-2+5-1)-(-4+3-7)+(-6+8)$;
   b) $-(10-7-4)-(5-9+12)+(20-15)$.

2. Suprime los paréntesis y los corchetes:

   a) $[1-(7-5)]-[1-(9-6)]-[1-(8+5)]$;
   b) $[(a-c)-(a-b)]-[(b-c)-(a+c)]$;
   c) $1-[1-(1-a)]-[(b-c)-(a+c)]$.

3. Efectúa:

$$\{5 \times [(-3) \times (-9)]\} \times \{(-6) \times [4 \times (-2)]\}.$$

4. Expresa, poniendo corchetes, las diferentes formas de efectuar el producto

$$(-4) \times (-3) \times 6 \times (-2) \times (-5)$$

Calcula de dos modos diferentes los productos siguientes:

5. $(-4+10-6) \times (7-9)$.

6. $(-12+5+11)\times(-6-2)$.

Efectúa lo más rápidamente posible las operaciones siguientes:

7. $(7-4+2)(11-9)+(14-16)(7-9)$.

8. $(8-18)(11-13)+(14-17)(-13+10)$.

9. La igualdad $(A\times B)\times C=B\times(A\times C)$ nos dice que para multiplicar un producto indicado por un número basta multiplicar uno solo cualquiera de sus factores por dicho número.
¿Qué propiedades permiten pasar del primer miembro al segundo de dicha igualdad?

10. Efectúa del modo más breve posible:

a) $148\times12-148\times9$;
b) $263\times23+263\times17$;
c) $548\times56-548\times46$;
d) $46\cdot7+46\cdot12-46\cdot17$;
e) $83\cdot25-83\cdot8-83\cdot13$;
f) $25\cdot16+25\cdot40-25\cdot52$.

11. Aplica la ley distributiva a los productos:

a) $(7+a)(b+5)$;
b) $(n-5)(m-3)$;
c) $(a-2)(b+5)(c-4)$;
d) $(m+n-p)(a-b)$.

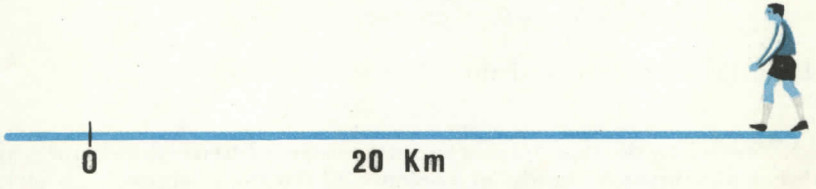
12. Efectúa lo más rápidamente posible las operaciones siguientes:

a) $(-1)(+1)(-1)(+1)(-1)(+1)$;
b) $(+1)(-3)(-1)(-1)$;
c) $(-2+8-5-3)(-4)$;
d) $(-1+2+3)(-4)$;
e) $(-4+10-6)(7-9)$;
f) $(+5-3+2)(+5-1)$;
g) $(7-4+2)(11-9)+(14-16)(7-9)$;
h) $(1+5)(7-9)-5(10-7)$.

15

División exacta de números enteros

71. Cociente exacto de dos números enteros.—*Luis salió hace 4 horas de un punto que está situado a 20 km a la derecha de O, y en este preciso momento llega al punto O. ¿Qué velocidad ha llevado?*



Solución. La distancia recorrida es $+20$ km, el tiempo -4 horas, y sea B la velocidad que ha llevado. Se puede escribir

$$-4 \times B = +20.$$

Sabemos que

$$-4 \times (-5) = 20. \qquad (1)$$

Luego $B = -5$.

La igualdad (1) suele escribirse así:

$$\frac{20}{-4} = -5$$

Por consiguiente, se tienen las equivalencias

$$-4 \times B = 20 \iff B = \frac{20}{-4} = -5 \iff (-4) \times (-5) = 20$$

El número 20 se llama *dividendo*, el entero -4 *divisor*, y el número -5 *cociente exacto* del entero 20 por el entero -4.

Luego, dada la igualdad $A \times B = C$, se tienen las siguientes equivalencias:

$$A = \frac{C}{B} \iff A \times B = C \iff B = \frac{C}{A} \qquad (2)$$

Es decir, *cociente exacto de dos enteros* llamados dividendo y divisor, es el entero por quien debe multiplicarse el divisor para obtener el dividendo.

EJEMPLOS. 1.º Halla los siguientes cocientes exactos

$$\frac{-10}{-2}=+5; \quad \text{porque } (-2)\times(+5)=-10$$

$$\frac{10}{-2}=-5; \quad \text{porque } (2)\times(-5)=10$$

2.º Halla otros cocientes exactos y deduce la regla correspondiente. Por ejemplo,

$$\begin{array}{lll} (+27):(+3)=+9, & \text{porque} & (+3)(+9)=+27; \\ (-27):(-3)=+9, & \text{porque} & (-3)(+9)=-27; \\ (+27):(-3)=-9, & \text{porque} & (-3)(-9)=+27; \\ (-27):(+3)=-9, & \text{porque} & (+3)(-9)=-27. \end{array}$$

De estos ejemplos se deduce la siguiente regla:

El cociente de dos números enteros se obtiene dividiendo sus valores absolutos y dando al cociente obtenido el signo + o el −, según que el dividendo y divisor sean de igual o de distinto signo.

72. Ecuaciones.—¿Qué valor hay que dar a A para que sea cierta la igualdad

$$(-36):A=+9?$$

Para resolver esta ecuación basta aplicar las equivalencias fundamentales

$$\frac{-36}{A}=+9 \iff A\times(+9)=-36 \iff \frac{-36}{+9}=A$$

De la última igualdad se obtiene

$$A=\frac{-36}{+9}=-4$$

EJEMPLOS. 1.º Calcula los valores de las letras en la igualdad siguiente

$$(-4)\times A=-12; \qquad A=\frac{-12}{-4}=+3$$

2.º ¿Hay algún número entero que sea igual a $\frac{-3}{5}$? No, porque si ese número fuera A, debía cumplirse que $A \times 5 = -3$, lo cual es imposible.

Conclusión: *No siempre existe el cociente exacto de dos números enteros.*

73. Trasposición de factores y divisores.—Consideremos la igualdad

$$\frac{A}{B} = C$$

siendo A, B y C números enteros. Sabemos que dicha igualdad equivale a las siguientes

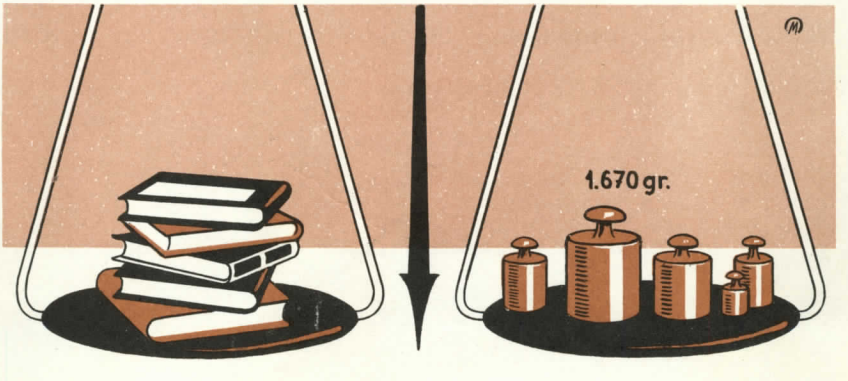
$$A = B \times C; \qquad \frac{A}{C} = B.$$

Es decir, el número B, que estaba en el primer miembro dividiendo, pasa al segundo miembro multiplicando; y el número C, que estaba en el segundo miembro multiplicando pasa al primero dividiendo.

Esta operación se llama **trasposición de factores y divisores.**

En una igualdad o desigualdad todo factor distinto de cero puede pasar al otro miembro como divisor, y todo divisor como factor.

EJEMPLOS. 1.º *No disponiendo de pesas inferiores a la de* 5 *gramos, queremos hallar el peso de un libro. Encontramos que* 5 *libros iguales al dado equilibran a* 1670 *gramos.*



Llamando A el peso del libro se puede escribir la igualdad

$$5 \cdot A = 1670.$$

Dividiendo por 5 los dos miembros:

$$A = 1670 : 5 = \mathbf{334\ gramos.}$$

Cada libro pesa 334 gramos. En este ejemplo vemos cómo el factor 5 del primer miembro pasa al segundo miembro como divisor.

2.° *Dado el cociente,* -18, *de dos números, y uno de ellos,* -90, *encontrar el otro.*

Según el enunciado, puede ser:

$$-90 : A = -18; \quad \text{o bien} \quad A : (-90) = -18.$$

En el primer caso se obtiene sucesivamente, multiplicando los dos miembros por A y dividiendo por 18:

$$-90 = (-18) \cdot A; \qquad A = (-90) : (-18) = 5$$

y en el segundo caso, multiplicando por -90:

$$A = (-18) \cdot (-90) = \mathbf{1620}.$$

74. El cero en la división.—Hay que considerar tres casos:

1.° Sea $A \neq 0$, entonces $\dfrac{0}{A} = 0$. Porque

$$0 = 0 \cdot A.$$

2.° Sea $A \neq 0$, entonces $\dfrac{A}{0}$ *no tiene significado.* Pero supongamos que fuera $\dfrac{A}{0} = C$. Entonces sería

$$A = C \times 0 = 0,$$

lo cual va contra la hipótesis de que $A \neq 0$.

3.° La expresión $\dfrac{0}{0}$ es *indeterminada.* Porque supongamos que

$$\frac{0}{0} = C,$$

o sea, $0 = C \times 0$. Ya que cualquier número satisface esta ecuación, el valor de C es indeterminado.

No confundas $\frac{0}{0}$ con $\frac{A}{A}$ $(A \neq 0)$, que es igual a 1.

Así que nunca se puede dividir por cero.

75. Propiedad distributiva de la división exacta respecto de la adición.—Comprueba que

$$\frac{(-12)+(-6)}{3} = \frac{-12}{3} + \frac{-6}{3} \tag{3}$$

En efecto, el primer miembro vale:

$$\frac{(-12)+(-6)}{3} = \frac{-(12+6)}{3} = \frac{-18}{3} = -6$$

y el segundo miembro vale:

$$\frac{-12}{3} + \frac{-6}{3} = (-4)+(-2) = -(4+2) = -6$$

luego la igualdad (3) es cierta.

Dicha igualdad expresa la **propiedad distributiva de la división exacta respecto a la adición.**

EJEMPLOS. 1.° En la igualdad siguiente sustituye las letras por números de manera que se verifique la igualdad

$$\frac{A+B}{C} = \frac{A}{C} + \frac{B}{C} \tag{4}$$

La sustitución debes hacerla de modo que

$$\frac{A+B}{C}, \ \frac{A}{C} \text{ y } \frac{B}{C}$$

sean números enteros.

2.° *Demostración de la propiedad distributiva.*—Esta demostración se apoya en la definición de cociente exacto de dos números enteros y en la propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la adición.

La igualdad (4) será verdadera si efectuando en ambos miem-

bros operaciones iguales se obtienen resultados iguales. Multipliquemos a los dos miembros por C.

$$\left(\frac{A+B}{C}\right)\times C = C\left(\frac{A}{C}+\frac{B}{C}\right) \iff A+B = C\times\frac{A}{C}+C\times\frac{B}{C}$$

luego

$$A+B=A+B.$$

3.° *Lee y escribe la propiedad que resulta de la igualdad* (4) *leída de derecha a izquierda.*

76. Problemas y ejercicios de aplicación. 1.° *Calcula el valor que debe tener* A *para que se verifique la igualdad*

$$\frac{(-8)+A}{-4}=6.$$

Solución:

$$\frac{(-8)+A}{-4}=6 \iff (-8)+A=(-4)\times 6;$$

$$(-8)+A=-24 \iff A=(-24)-(-8)=(-24)+8;$$

$$A=-16.$$

2.° *Calcula el valor que debe tener* A *para que se verifique la igualdad*

$$\frac{A+4}{4}=A-5$$

Solución:

$$\frac{A+4}{4}=A-5 \iff A+4=4\times(A-5);$$

$$A+4=4\times A-20 \iff A-4A=-20-4;$$

$$A-4A=-24 \iff -3A=-24$$

Luego

$$A=\frac{24}{3}=8.$$

Por cada signo de equivalencia $\iff$ escribe la propiedad que has aplicado.

3.° *Un señor gana* 10000 *ptas. mensuales y gasta* 7500 *ptas. ¿Cuánto habrá ahorrado en* 8 *años?*

Solución: El ahorro por mes se puede representar por el par (10000, 7500) o bien por el número positivo $+2500$ ptas. Y como

$$8 \text{ años} \iff (8 \times 12) \text{ meses} = 96 \text{ meses},$$

el ahorro en 8 años será

$$2500 \frac{\text{ptas.}}{\text{mes}} \times 90 \text{ meses} = 240000 \text{ ptas.}$$

4.° *Un señor inicia su negocio con* 500000 *ptas. En los siete primeros años sus ingresos anuales fueron de* 200000 *ptas., y sus gastos de* 90000 *ptas. En el octavo año tiene una ganancia de* 150000 *ptas. ¿Cuál es su capital al cabo de los ocho años?*

Solución:
$$C = 500000 + (200000 \times 7) - (90000 \times 7) + 150000$$
$$C = 500000 + 1400000 - 630000 + 150000$$
$$C = 2050000 - 63000 = 1420000 \text{ ptas.}$$

5.° *Una señora sale de compras con su esposo y gasta* 4000 *pesetas en ropa,* 900 *en zapatos y* 500 *en artículos de alimentación. Su esposo le entrega* 10000 *ptas., paga cuanto debe, con lo cual le sobran a la señora* 2000 *ptas. ¿Qué dinero llevó la señora a la compra?*

Solución: Sea C el dinero con que la señora salió a la compra. Luego se tiene:

$$[C - (4000 + 900 + 500) + 10000] = 2000$$
$$C + (-5400) + 10000 = 2000$$
$$C + 4600 = 2000$$
$$C = 2000 - 4600$$
$$C = -2600 \text{ ptas.}$$

Esta señora debía 2600 ptas.

6.° *En un depósito hay* 500 *litros de agua. Por un tubo entran en el depósito* 20 *litros por minuto y por un grifo salen* 30 *litros por minuto.* a) *¿Cuánta agua habrá en el depósito después de* 15 *minutos que estén funcionando el tubo y el grifo?* b) *¿Cuánto tiempo tardará en vaciarse este depósito?*

Solución. a) El par (20, 30) representa el agua que pierde por minuto el depósito. Pierde 10 litros de agua por minuto que puede representarse por -10. Después de 15 minutos se pierden $(-10) \times 15$ litros.

Luego al cabo de 15 minutos tendrá el depósito:

$$C = 500 + (-10) \times 15 = 500 - 150 = 350 \text{ litros.}$$

b) Sea t minutos el tiempo que tarda en vaciarse. Al cabo de esos t minutos el agua que queda en el depósito es cero. Luego:

$$500 + (-10) \times t = 0.$$

Halla el valor de t en esa ecuación.

EJERCICIOS

Calcula el número entero que resulta de las operaciones en los siguientes casos:

1. $(-4) \times \dfrac{15}{5}$;

2. $\left(\dfrac{-15}{5}\right) \times (-7)$;

3. $\dfrac{(-24) \times 3}{2 \times 3}$;

4. $\dfrac{-9}{-\dfrac{18}{-6}}$;

5. $-\dfrac{\dfrac{-20}{5}}{2}$;

6. $\dfrac{\dfrac{-36}{4}}{\dfrac{6}{2}}$;

7. $\dfrac{16}{-4} \times (-5) + \dfrac{-12}{3}(-2)$;

8. $\dfrac{\dfrac{64}{-4} \times (-6)}{8 \times \dfrac{-12}{-3}}$;

9. $\dfrac{-(-5) + (-10) \times \dfrac{12}{-3}}{-\dfrac{15}{5} \times (-3)}$;

10. $\dfrac{(-8) \times \dfrac{-15}{3} + \dfrac{30}{-5} \times (-4)}{\left(-\dfrac{8}{4}\right) \times (-3) - \left(\dfrac{24}{-4}\right)}$.

11. Efectúa las siguientes divisiones:

a) $(-18):(-6)$; b) $(+63):(-7)$; c) $(-63):(-9)$.

12. Efectúa:

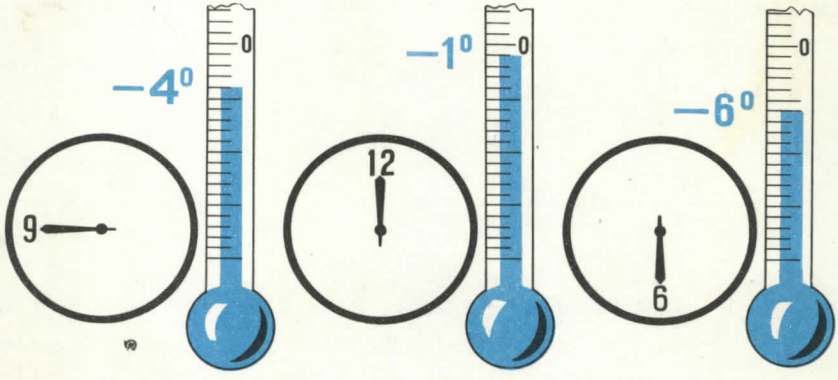
a) $(21+70-42):7$;
b) $(105+75-125):5$;
c) $(66-42-18):6$;
d) $(195-90+75):15$;
e) $(256+80-144):16$;
f) $(625-500-75):25$.

13. Halla el valor A que se deduce de las siguientes igualdades:

a) $10A+5A=75$;
b) $8A=90+3A$;
c) $5(A-5)=125$;
d) $(A+8):5=16$;
e) $(5A-7):7=4$;
f) $25+4A=3A+60$.

14. Halla B en las igualdades:

a) $6(B-5)=30$;
b) $2(5B-9)=42$;
c) $4B-56=16-2B$;
d) $B:7=90-2B$;
e) $(5B-8):4=3$;
f) $6B+18=3B+72$.



15. En un día de invierno las lecturas del termómetro fueron $-4°$ C por la mañana; $-1°$ C al mediodía y $-6°$ C al anochecer. ¿Cuál fue la temperatura media?

16. La altitud de un punto es -80 m sobre el nivel del mar. La altitud de un segundo punto es la quinta parte del anterior. ¿Cuál es dicha altitud? ¿Es altura o profundidad?

17. Las temperaturas medias durante siete días de una semana de enero han sido: $-7°$ C, $-4°$ C, $-3°$ C, $0°$ C, $6°$ C, $2°$ C, $-1°$ C. ¿Cuál es la temperatura media en dicha semana?

18. Se compra una mercancía por 4.560 ptas., pero por pagar al contado se obtiene un descuento de la duodécima parte del coste. ¿Cuánto habrá que pagar?

19. Calcula los valores de las letras en las igualdades siguientes:

a) $4\times A=-24$ b) $A\times(-15)=75$.

20. ¿Es verdad que $(-2)=\dfrac{3}{-4}$? ¿Por qué?

21. ¿Cuál es el cociente $\dfrac{-2}{3}$?

22. De los cocientes siguientes explica cuáles existen y cuáles no y razona por qué:

a) $\dfrac{10}{-2}$; b) $\dfrac{6}{5}$; c) $\dfrac{-20}{-5}$; d) $\dfrac{1}{-6}$.

23. Calcula cuál es el número entero solución de cada uno de los ejercicios siguientes:

a) $(-2)\times\dfrac{12}{3}$; b) $\left(-\dfrac{12}{3}\right)\times(-6)$; c) $\dfrac{(-30)\times 4}{2\times 4}$;

d) $\dfrac{-6}{-\dfrac{12}{-4}}$; e) $-\dfrac{-\dfrac{16}{2}}{4}$; f) $\dfrac{-\dfrac{20}{2}}{\dfrac{10}{5}}$;

g) $\dfrac{14}{-2}\times(-3)+\dfrac{-10}{2}\times(-5)$; h) $\dfrac{\dfrac{30}{-3}\times(-4)}{5\times\dfrac{-14}{-7}}$;

i) $\dfrac{-(-3)+(-9)\times\dfrac{4}{-2}}{\left(-\dfrac{14}{2}\right)\times(-3)}$; j) $\dfrac{(-7)\times\dfrac{(-4)}{2}+\dfrac{12}{-3}\times(-4)}{\left(-\dfrac{12}{6}\right)\times(-2)-\left(\dfrac{20}{-10}\right)}$.

24. Escribe en forma de productos, sacando factor común

a) $(-9)\times 5+(-1)\times 5$;
b) $8\times(-6)+(-10)\times(-6)$;
c) $7\times(-3)-8\times 3$;
d) $(-4)\times 5-6\times 5$;
e) $9\times A+(-3)\times A$;
f) $A\times 5+B\times 5$;
g) $A\times C+B\times C$.

25. Resuelve las ecuaciones:

a) $\dfrac{(-3)+A}{-2}=4$; c) $\dfrac{X-1}{-5}=3$;

b) $\dfrac{B+3}{3}=B+5$; d) $\dfrac{2X-6}{-2}=X-5$.

26. En un depósito entran 20 litros de agua por minuto por un grifo y salen 15 litros de agua por minuto por un orificio del fondo del depósito. Si en un principio el depósito está vacío y comienzan a funcionar el grifo y el orificio de salida, ¿cuánta agua habrá en el depósito al cabo de 30 minutos?

27. En un depósito hay 80 litros de agua. Por un grifo entran en el depósito 10 litros de agua por minuto y por un sumidero se escapan 14 litros por minuto. ¿Cuánta agua habrá en el depósito cuando lleven abiertos 10 minutos el grifo y el sumidero?

28. Un comerciante comienza su negocio con 100.000 pesetas. Los cinco primeros años ha tenido de ingresos, cada año, 150.000 pesetas, y de gastos, también cada año, 80.000 pesetas. El sexto año ha tenido una ganancia de 70.000 pesetas. Suponiendo que todos los beneficios los invierte en el negocio, ¿cuál es su capital al cabo de los seis años?

29. Un comerciante comienza su negocio con 60.000 pesetas y pierde los tres primeros años 6.000 pesetas cada año. Cada uno de los cinco años siguientes gana 8.000 pesetas. Suponiendo que invierte en el negocio todos los beneficios, ¿cuál será su capital al cabo de los ocho años?

30. Una señora gasta 3.000 pesetas en un mueble y después recibe 9.000 pesetas, resultando después de lo anterior con un capital de 2.000 pesetas. ¿Qué dinero tenía al principio?

31. Dada la igualdad

$$(10-A)+18=-4.$$

escribe un enunciado cuyo planteamiento dé lugar a la misma, y resuélvela.

32. Dada la igualdad

$$(A-50)+20=-5$$

escribe un enunciado tal que al plantearlo resulte dicha igualdad, y resuélvela.

33. Pon un enunciado que satisfaga a la igualdad

$$(25-B)+40=-8$$

y resuélvela.

34. Escribe un enunciado tal que al plantearlo dé la igualdad

$$500+(-650)+263=X$$

y resuélvela.

16

Potenciación de números enteros

77. Potenciación de números enteros con exponente natural. ¿Cuántos remeros participan en las regatas de la figura? Son 4 remeros en cada una de las 4 traineras. Luego en total hay:

$4 \times 4 = 16$ remeros

$$4 \times 4 = 4^2 = 16$$

Se presentan con frecuencia productos de esta naturaleza, en que todos los factores son iguales. Tales productos se denominan *potencias.*

Base de la potencia es el factor repetido.

Exponente de la potencia es el número de factores iguales que forman dicha potencia. Se le escribe en cifras más pequeñas, arriba y a la derecha del número o base.

En el caso anterior la base es 4 y el exponente 2. Se escribe abreviadamente así

4^2

EJEMPLOS. 1.° Sea el producto

$$P=(-5)\cdot(-5)\cdot(-5)\cdot(-5)\cdot(-5)\cdot(-5)\cdot(-5)$$

Esta potencia se escribe abreviadamente así:

$$(-5)^7$$

y se lee: «**-5 elevado a 7**».

2.° En el ejemplo anterior, ¿cuáles son la base, el exponente y la potencia?

78. Casos particulares.—Las potencias de exponente 2 se llaman *cuadrados*. Así

$$3\times 3=3^2=9;\quad 9 \text{ es el } \textit{cuadrado} \text{ de } 3$$

Las potencias de exponente 3 se llaman *cubos*. Así

$$2\times 2\times 2=2^3=8;\quad 8 \text{ es el } \textit{cubo} \text{ de } 2$$

A^2 se lee "A al cuadrado" o "*cuadrado de A*"

A^3 se lee "A al cubo" o "*cubo de A*"

A^2, A^3, A^4 se enuncian también (y es más cómodo) *A dos, A tres, A cuatro*, ..., que no hay que confundir con dos A, tres A, cuatro A ($2A$, $3A$, $4A$, ...).

EJEMPLOS. 1.° Calcula el cuadrado del número 2; $2^2=4$
el cubo del número 3; $3^3=27$.

2.° Calcula los cuadrados de los 20 primeros números y pon los resultados en forma de tabla, que es muy conveniente se sepa de memoria

A	1	2	3	4	.....	18	19	20
A^2	1	4	9					400

79. Potencias notables. 1.° *Potencias de cero.* Todas las potencias de cero son iguales a cero:

$$0^2=0^3=0^n=0$$

2.° *Potencias de uno.* Todas las potencias de 1 son iguales a 1:

$$1^2=1^3=1^n=1$$

3.° *Potencias de exponente uno.* Ya que el exponente es igual

al número de factores del producto, a^1 no tiene sentido, según la definición, porque un producto tiene por lo menos dos factores. Lo mismo sucede para a^0. Para evitar este inconveniente se hace por *definición*

$$a^1 = a.$$

Así:

$$0^1 = 0; \quad 1^1 = 1; \quad 2^1 = 2; \quad 3^1 = 3; \quad (-5)^1 = -5; \quad (-7)^1 = -7.$$

4.° *Potencias de* 10. Se tiene:

$$10^1 = 10; \quad 10^2 = 10 \times 10 = 100; \quad 10^3 = 10 \times 10 \times 10 = 1000; \text{ etc.}$$

En particular: $10^6 = 1000000$ (1 millón)
$10^9 = 1000000000$ (mil millones)

En general: 10^n se escribe con 1 seguido de n ceros.

80. Potencias de un número negativo.—Si el exponente es natural, cabe considerar dos casos:

1.° Sea

$$(-4)^5 = (-4)(-4)(-4)(-4)(-4).$$

Su valor absoluto es 4^5 ó 1024; su signo es $-$, ya que el número de factores negativos es impar (núm. 65), luego:

$$(-4)^5 = -1024$$

Toda potencia de exponente impar de un número negativo es un número negativo.

OTRO EJEMPLO: $(-1)^{15} = -1$.

2.° Sea

$$(-4)^4 = (-4)(-4)(-4)(-4).$$

Su valor absoluto es 256; su signo es $+$, ya que el número de factores negativos es par (núm. 65), luego:

$$(-4)^4 = +256.$$

Toda potencia de exponente par de número negativo es un número positivo.

81. Producto de potencias de la misma base.—Sea calcular el producto

$$(-3)^2 \times (-3)^4$$

Por definición:

$$(-2)^2 = (-2) \times (-2)$$
$$(-2)^4 = (-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2)$$

Luego

$$(-2)^2 \times (-2)^4 = [(-2) \times (-2)] \times [(-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2)] =$$
$$= (-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2) = (-2)^6$$

Es decir

$$(-2)^2 \times (-2)^4 = (-2)^6 = (-2)^{2+4}$$

El producto de dos potencias de la misma base es otra potencia de la misma base cuyo exponente es la suma de los exponentes de los factores.

EJEMPLOS. 1.º

$$(-3)^4 \times (-3)^5 = (-3)^9$$

2.º Si se quiere calcular:

$$a^2 \times a^4 \times a^5$$

se calcula:

$$a^2 \times a^4 = a^{2+4} = a^6$$

y

$$a^6 \times a^5 = a^{6+5} = a^{11} = a^{2+4+5}$$

El resultado puede aplicarse en sentido inverso. Por ejemplo:

$$a^9 = a^4 \times a^5 = a^2 \times a^2 \times a^5 = a^3 \times a^2 \times a^3 \times a$$

De una manera general

$$a^m \times a^p \times a^q = a^{m+p+q}$$

82. Cociente de dos potencias de la misma base. 1.er CASO: Divide la potencia

$$(-3)^5 = (-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3)$$

entre la potencia

$$(-3)^2 = (-3) \times (-3).$$

Solución:

$$\frac{(-3)^5}{(-3)^2}=\frac{(-3)\times(-3)\times(-3)\times(-3)\times(-3)}{(-3)\times(-3)}=$$
$$=(-3)\times(-3)\times(-3)=(-3)^3$$

El cociente es $(-3)^3$ porque multiplicado por el divisor $(-3)^2$ nos da el dividendo $(-3)^5$; es decir

$$(-3)^3\times(-3)^2=(-3)^5$$

¿Qué relación hay entre los exponentes del dividendo, divisor y cociente?

El cociente de dos potencias de la misma base es otra potencia de la misma base cuyo exponente es la diferencia de los exponentes.

EJEMPLOS. 1.º

$$\frac{(-5)^{11}}{(-5)^4}=(-5)^7$$

2.º Divide la potencia

$$(-4)^3=(-4)\times(-4)\times(-4)$$

entre la potencia

$$(-4)^3=(-4)\times(-4)\times(-4)$$

Solución:

$$(-4)^3:(-4)^3=(-4)^{3-3}=(-4)^0$$

por otra parte

$$\frac{(-4)^3}{(-4)^3}=\frac{(-4)\times(-4)\times(-4)}{(-4)\times(-4)\times(-4)}=1$$

En realidad, según la definición dada de potencia, a^0 no tiene ningún significado, pues no existe producto si no hay ningún factor. Pero, para que sigan cumpliéndose las reglas de cálculo, se ha convenido que

$$a^0=1$$

3.º Divide la potencia

$$(-5)^2=(-5)\times(-5)$$

entre la potencia

$$(-5)^4=(-5)\times(-5)\times(-5)\times(-5)$$

Solución:

$$\frac{(-5)^2}{(-5)^4}=\frac{(-5)\times(-5)}{(-5)\times(-5)\times(-5)\times(-5)}=\frac{1}{(-5)(-5)}$$

¿Es un número entero? Enuncia tú la regla correspondiente.

83. Potencia de una potencia de un número entero.—Hágase el cálculo

$$P=[(-2)^4]^3$$

Según la definición de potencia de un número se tiene:

$$P=(-2)^4\times(-2)^4\times(-2)^4$$

Y según el producto de potencias de igual base:

$$P=(-2)^{4+4+4}$$

es decir

$$P=(-2)^{4\times3}=(-2)^{12}$$

La potencia de una potencia de un número es otra potencia del mismo número cuyo exponente es el producto de los exponentes.

EJEMPLOS. 1.°

$$[(-4)^2]^3=(-4)^6.$$

2.°

$$(2^3)^2=2^6=64.$$

84. Potencia de un producto.—Sea calcular:

$$P=[(-2)\times4\times(-5)]^3$$

Según la definición de potencia de un número se tiene

$$\begin{aligned}P&=[(-2)\times4\times(-5)]\times[(-2)\times4\times(-5)]\times[(-2)\times4\times(-5)]=\\&=(-2)\times4\times(-5)\times(-2)\times4\times(-5)\times(-2)\times4\times(-5)=\\&=[(-2)\times(-2)\times(-2)]\times[4\times4\times4]\times[(-5)\times(-5)\times(-5)]=\\&=(-2)^3\times4^3\times(-5)^3.\end{aligned}$$

Es decir

$$P=[(-2)\times4\times(-5)]^3=(-2)^3\times4^3\times(-5)^3.$$

Para elevar un producto indicado a una potencia, se eleva cada factor del producto a dicha potencia.

EJEMPLOS:

1.º

$$[(-2)\cdot(+5)\cdot(-6)]^3=(-2)^3\cdot(+5)^3\cdot(-6)^3=+2^3\,5^3\,6^3.$$

2.º

$$(5\,a\,b)^3=5^3\,a^3\,b^3.$$

3.º

$$[(-2)^3\cdot 5^2]^3=(-2)^9\cdot 5^6=-2^9\cdot 5^6$$

85. Potencia de un cociente.—Sea calcular $\left(\frac{30}{-6}\right)^3$

Por definición de potencia se tiene

$$\left(\frac{30}{-6}\right)^3=\frac{30}{-6}\times\frac{30}{-6}\times\frac{30}{-6}=\frac{30\times 30\times 30}{(-6)\times(-6)\times(-6)}=\frac{(30)^3}{(-6)^3}$$

Para elevar un cociente a una potencia se elevan los dos términos del cociente a dicha potencia.

EJEMPLOS:

$$\left[\frac{(+2)}{(-5)}\right]^2=\frac{(+2)^2}{(-5)^2}=\frac{4}{25};\qquad \left(\frac{5x}{4y}\right)^3=\frac{125\,x^3}{64\,y^3}$$

EJERCICIOS

1. Escribe con la notación abreviada las potencias:

$3\times3\times3$; $4\times4\times4\times4\times4$;
8×8; $10\times10\times10\times10$; $6\times6\times6$

2. Calcula las expresiones siguientes:

a) $2^5\times5^5$; d) $4^2\times5^3$; g) $2^3\times3^2$; j) $5^2\times11^2$;
b) $2^7\times5^6$; e) $8^2\times5^3$; h) $2^2\times7^2$; k) $5^2\times20^2$;
c) $2^3\times5^5$; f) $4^3\times25^3$; i) $5^2\times9^2$; l) $3^3\times5^3$.

3. Calcula las expresiones siguientes:

a) $2^2\times5^2\times7$; d) $2^3\times5^3\times11^2$; g) $(2^2\times5^2)^3$;
b) $2^3\times3\times5^3$; e) $5^2\times13^2\times2^2$; h) $(2^2\times5^2)^2$;
c) $4^2\times3^2\times5^2$; f) $2^2\times12^2\times5^2$; i) $(3\times5\times2)^2$.

4. Calcula las potencias de exponentes 2, 3, 4, 5 de los números siguientes:

$$(+1);\ (-1);\ (+3);\ (-2);\ (+5);\ (-5);\ (-4).$$

5. Calcular:

a) $(-7)^4$; $(-9)^3$; $(+7)^4$; $(-11)^3$; $(-12)^4$;
b) $5^2 \times 5^2$; $(-4) \times (-4)^2$.

6. Calcula:

a) $[(-1)(+3)(-5)]^2$;
b) $[(+1)(-2)(-4)]^3$;
c) $[(+3)(-3)(-5)]^2$;
d) $(-4)^7 : (-4)^3$.

7. Se divide un segmento rectilíneo en 4 partes iguales, luego cada parte en 4, y así sucesivamente 6 veces. ¿En cuántas partes se ha dividido el segmento?

8. ¿Qué cantidad ha gastado después de 7 semanas el que gasta 7 pesetas por día?

9. ¿Cuántas plumas hay en 12 cajones que contienen cada uno 12 paquetes, si cada paquete contiene 12 docenas de cajas y cada caja 12 docenas de plumas? (Escribe la respuesta bajo forma de potencia antes de calcularla.)

10. Escribe una serie de 5 números empezando por 2, y que cada uno sea el cuadrado del precedente.

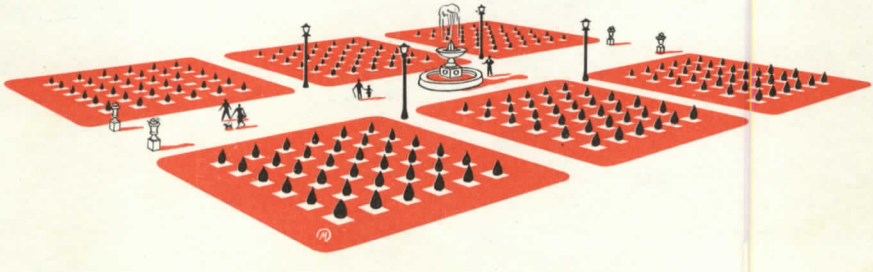
11. Escribir una serie de tres números que empiece por 0,4 y que cada uno sea el cubo del precedente.

12. Un matrimonio tiene 11 descendientes. Si cada uno de éstos tiene otros tantos, y así a continuación, ¿cuántos descendientes tendrá el matrimonio al cabo de 4 generaciones?

13. ¿Cuántos árboles hay en un bosque que tiene 142 filas de 142 árboles cada una?

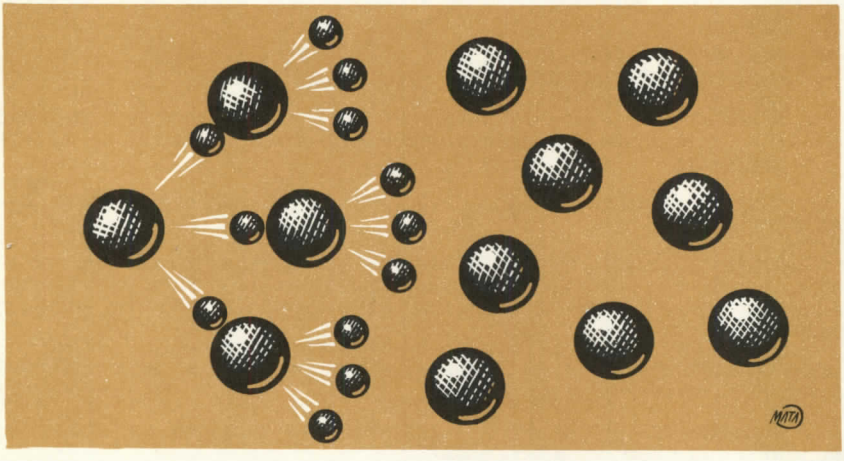
14. ¿Cuántos relojes hay en 8 cajones que contiene cada uno 8 paquetes, si cada paquete contiene 8 cajas y cada caja 8 filas de 8 relojes cada una? (Escribe la respuesta bajo forma de potencia antes de calcularla.)

15. Un jardín consta de 6 macizos, cada uno de los cuales tiene 6 filas, de 6 plantas cada una. Halla el número total de plantas del jardín, expresándolo previamente en forma de potencia.



16. Un matrimonio tiene 4 descendientes. Si cada uno de éstos tiene otros tantos, ¿cuántos descendientes tendrá el matrimonio al cabo de 6 generaciones?

17. Un átomo de uranio al desintegrarse emite 3 neutrones, los cuales, chocando con otros tantos átomos de uranio, los desintegran, a su



vez, y así sucesivamente. ¿Cuántos átomos de uranio se habrán desintegrado después de 7 choques?

18. Si cada hl de trigo sembrado produce 10 hl de cosecha, y cada año se siembra todo lo que se recoge en el año anterior, ¿cuántos hl se recogerán al cabo de 5 años?

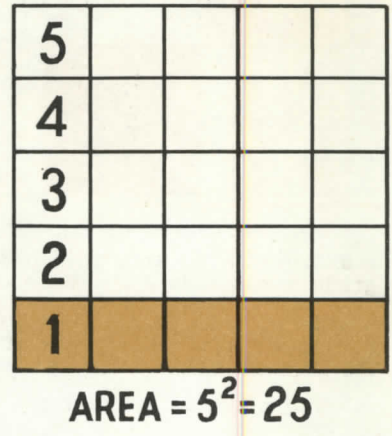
17

Igualdades notables

86. Ejercicios de cuadrados.—Expresa de todas las maneras posibles el número de cuadrados que hay en la figura adjunta.

Solución: Cada fila tiene 5 cuadrados y hay 5 filas. Luego el número de cuadrados es:

$$5+5+5+5+5=5\times 5=5^2$$



EJEMPLOS. 1.º En una hoja de papel cuadriculado forma un cuadro que tenga 49 cuadritos. ¿Cuántos cuadritos tendrá cada lado

2.º Los 36 alumnos de una clase hacen gimnasia formando un cuadro con igual número de filas que de columnas. ¿Cuántos alumnos hay en cada fila?

87. Cuadrado de una suma de dos números.—Observa en la figura que el cuadrado cuyo lado mide $5+4$ se compone de un cuadrado de área 5^2, otro de área 4^2 y dos rectángulos de área 5×4 cada uno.

$$(5+4)^2=(5+4)\ ((5+4)=5^2+5\cdot 4+4\cdot 5+4^2=$$
$$=5^2+4^2+2\times(5\times 4)=25+16+40=81$$

en virtud de las propiedades de la multiplicación estudiadas en Primer Curso.

Comprobación:

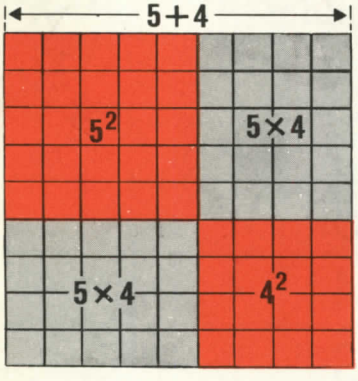
$5+4$ es 9

y

$$9^2=9\times 9=81$$

El cuadrado de la suma de dos números es igual a la suma de los cuadrados de los números, aumentada en su doble producto.

Esta propiedad es general, es decir, es válida cualquiera que sea el par de números empleados como sumandos; y puede establecerse directamente sin necesidad de figuras.



Así:

$$(a+b)^2=(a+b)\times(a+b)=$$
$$=a^2+ab+ba+b^2$$
$$(a+b)^2=a^2+b^2+2ab \qquad (1)$$

Las letras a y b representan dos números *naturales cualesquiera*. Poniendo números en vez de letras, por ejemplo,

$$(5+4)^2=5^2+4^2+2\cdot5\cdot4,$$

parecería una propiedad *particular* de estos números.

Nota.—A una suma de dos sumandos se le llama *binomio* y a la igualdad (1), *desarrollo del binomio.*

88. Cuadrado de una diferencia.—El cuadrado rojo (AC) de la figura es igual al cuadrado total (AK) menos (el rectángulo BK + el rectángulo DK) más el cuadrado CK. Es decir:

cuadrado (AC) = cuadrado (AK) − 2 veces rectángulo (DK) + + cuadrado (CK)

ya que los rectángulos (BK) y (DK) son iguales y en la suma de estos dos rectángulos se repite dos veces el cuadrado CK.

Como

$$AD=7 \quad \text{y} \quad DH=3$$

sustituyendo en la igualdad anterior se tiene

$$(10-3)^2=10^2-2\times10\times3+3^2$$

o bien

$$(10-3)^2=10^2+3^2-2\times10\times3.$$

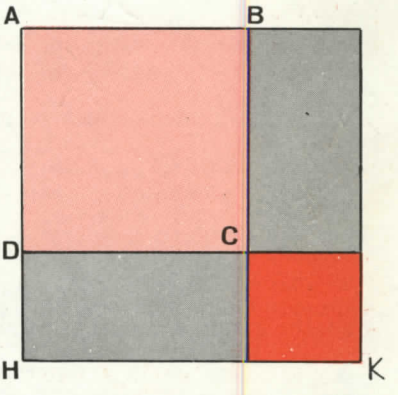
El cuadrado de la diferencia de dos números es igual a la suma de los cuadrados de dichos números, disminuida en su doble producto.

Esta propiedad es general y puede establecerse sin necesidad de figuras.

Así:

$$(a-b)^2=(a-b)\times(a-b)=a^2-ab-ab+b^2=a^2+b^2-2ab.$$

$$\boldsymbol{(a-b)^2=a^2+b^2-2ab} \qquad (2)$$



EJEMPLOS. 1.º

$$(a-4)^2=a^2+4^2-2(a\times 4)=$$
$$=a^2-8a+16.$$

2.º Efectúa:

$$(12-7)^2=(12-7)\,(12-7)=$$
$$=12^2-12\cdot 7-7\cdot 12+7^2=$$
$$=12^2+7^2-2\times(12\times 7)=$$
$$=144+49-168=25.$$

Comprobación. Haciendo la operación directa se obtiene:

$$(12-7)^2=5^2=5\times 5=25$$

89. Producto de la suma de dos números por su diferencia.— Calculemos el producto $(a+b)\,(a-b)$:

$$\begin{array}{r} a+b \\ a-b \\ \hline a^2+ab \\ -ab-b^2 \\ \hline a^2 \quad -b^2 \end{array}$$

Luego

$$\boldsymbol{(a+b)\,(a-b)=a^2-b^2} \qquad (3)$$

El producto de la suma de dos números por su diferencia es igual a la diferencia de sus cuadrados.

EJEMPLOS. 1.º

$$(a+4)\,(a-4)=a^2-16.$$

2.º Expresa la igualdad (3) leyéndola de derecha a izquierda.

EJERCICIOS

1. Efectúa

a) $(3-a)^2$; b) $(2a-1)^2$; c) $(2a-3b)^2$; d) $(3x^4-4y^3)^2$.

2. Calcula las letras en las igualdades siguientes:

a) $(x-5)^2=64$; b) $(3x-6)^2=81$; c) $(8-x)^2=36$.

3. ¿Cuánto debe valer a para que se verifiquen las igualdades siguientes?:

a) $7^2+2\times7\times a+a^2=81$;
b) $5^2+2\times5\times a+a^2=36$;
c) $7^2-2\times7\times a+a^2=9$;
d) $9^2-2\times9\times a+a^2=49$.

4. En un ejercicio de gimnasia hay igual número de filas que de columnas. Se retiran dos filas y dos columnas y así quedan 81 alumnos. ¿Cuántos alumnos había al principio?

5. El suelo de una habitación cuadrada está cubierto con 100 baldosas. ¿Cuántas baldosas hay por cada lado? ¿Cuánto mide cada baldosa?

6. Si las 100 baldosas del ejercicio anterior están dispuestas formando un cuadro en el centro y alrededor de éste una cenefa, que tiene dos filas de baldosas por cada lado, ¿cuántas baldosas hay en el cuadro central, y cuántas en la cenefa?

7. Efectúa los productos:

a) $(2a+1)(2a-1)$; c) $(2x+5)(2x-5)$; e) $(3x+y)(3x-y)$;
b) $(x+4)(x-4)$; d) $(4x-3)(4x+3)$; f) $(a-3b)(a+3b)$.

8. Escribe en forma de producto:

a) 67^2-33^2; d) x^2-64; g) $49x^2-25$;
b) 74^2-36^2; e) x^2-1; h) $4x^2-9a^2$;
c) $(x+y)^2-(x-y)^2$; f) $16x^2-9$; i) $16x^2-121b^2$.

9. Calcula rápidamente:

$$\frac{30^3}{5^3};\quad \frac{40^4}{8^4};\quad \frac{2^2\cdot4^2\cdot5^2}{16^5};\quad \frac{2^4\cdot3^4\cdot5^4}{21^4};\quad \frac{4^5\cdot5^5}{125^3}$$

EJEMPLOS:

$$2^3\cdot5^3\cdot7^3=(2\cdot5\cdot7)^3=(10\cdot7)^3=70^3=343.000$$

$$\frac{80^4}{16}=\left(\frac{80}{16}\right)^4=5^4=625.$$

10. Halla mentalmente:

$$201^2;\ 99^2;\ 401^2;\ 199^2.$$

EJEMPLOS:

$$101^2=(100+1)^2=100^2+2\cdot100\cdot1+1^2=10\,000+200+1=10\,201$$
$$299^2=(300-1)^2=300^2-2\cdot300\cdot1+1^2=90\,000-600+1=89\,401.$$

11. Calcula mentalmente: 30^3; 40^2; $0{,}2^4$; 500^3; $0{,}03^2$; $0{,}1^5$; 200^4.

EJEMPLOS:

$$60^3=(6\cdot10)^3=6^3\cdot10^3=216\cdot1000=216\,000$$
$$0{,}5^3=(5:10)^3=5^3:10^3=125:1000=0{,}125$$

12. Calcula las potencias siguientes:

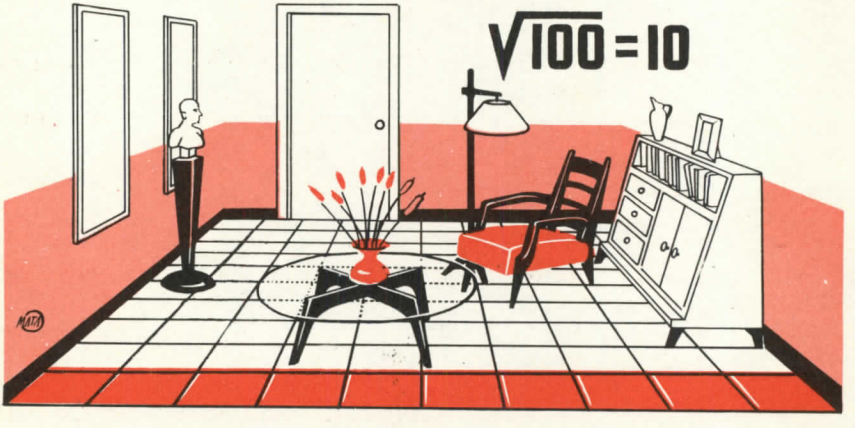
$0{,}1^4$; $0{,}2^2$; $0{,}03^2$; $0{,}02^3$; $0{,}6^2$; $0{,}04^3$

18

Raíz cuadrada de números enteros

90. Definiciones.—*El suelo de la habitación cuadrada de la figura tiene* 100 *baldosas. ¿Cuántas baldosas tendrá por lado?*

Para resolver esta cuestión habrá que hallar un número que elevado al cuadrado dé 100. Es 10, pues $10^2=100$.



Al número 10 se denomina *raíz cuadrada* de 100, y en general: *Raíz cuadrada de un número es otro número cuyo cuadrado es igual al número dado.*

Así la raíz cuadrada de 49 es 7, porque $7^2=49$.

La raíz cuadrada de 1 es 1, porque $1^2=1$.

La raíz cuadrada de 9 se designa por $\sqrt{9}$.

El símbolo $\sqrt{\ }$ se llama *signo radical.*

El número que se encuentra debajo del signo radical se denomina *radicando.* En el anterior ejemplo es 9.

De modo que si $r^2=R$, r es raíz cuadrada de R.

Pero r^2 es un número siempre positivo; lo mismo sucederá con su igual R. Luego:

Un número negativo no tiene raíz cuadrada.

Las igualdades $(+7)^2=49$ y $(-7)^2=49$ nos dicen que el número $+49$ tiene dos raíces cuadradas opuestas $(+7)$ y (-7).

Todo número positivo, que admita raíz cuadrada, tiene dos raíces cuadradas que son dos números opuestos.

Se escribe:

$$+7=+\sqrt{49}, \quad \text{o bien} \quad +7=\sqrt{49}, \quad \text{y} \quad -7=-\sqrt{49}.$$

Un número entero se llama *cuadrado perfecto* cuando es el cuadrado de un número entero.

El siguiente cuadro debe estudiarse cuidadosamente. El alumno verá que le es útil ampliarlo por sí mismo.

Números	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Cuadrados	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144	169	196

Por tanto, los números de la primera fila son las *raíces cuadradas exactas* de los correspondientes de la segunda fila.

Así, 14 es la raíz cuadrada exacta de 196; 8 es la raíz cuadrada exacta de 64. ¿Cuál es la raíz cuadrada exacta de 144? ¿Y de 121?

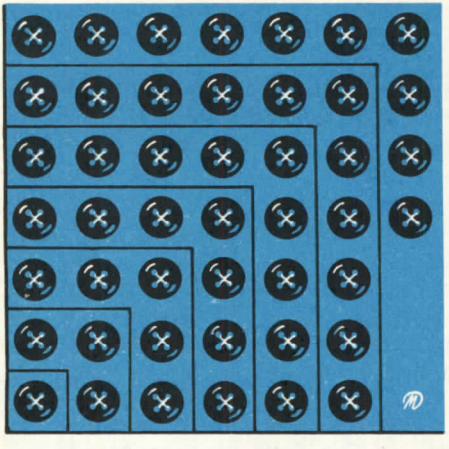
91. Raíz cuadrada entera.—Supongamos que queremos hallar la raíz cuadrada de 46. Este número no se encuentra en la tabla, y, por tanto, no tiene raíz cuadrada exacta. No se pueden disponer 46 botones formando un cuadrado de tantas filas como columnas, pues con 6 botones de lado resultan en total $6^2=36$ botones, y con 7 botones de lado salen $7^2=49$. Se dice que 46 *no es cuadrado perfecto*. Por tanto, la raíz cuadrada de 46 constará de parte entera, 6, y parte decimal. A la parte entera, 6, se le denomina *raíz cuadrada entera de* 46.

Raíz cuadrada entera de un número es la raíz del mayor cuadrado perfecto contenido en él.

Así, dado el número 147, el mayor cuadrado perfecto contenido en él es 144, cuya raíz cuadrada es 12; ésta es, por tanto, la raíz entera de 147.

Análogamente, la raíz entera de 175 es 13, pues $13^2=169$, que es el mayor cuadrado perfecto contenido en 175.

92. Resto de la raíz cuadrada.—En el ejemplo de los botones del número anterior, para hallar la raíz cuadrada de 46, vamos disponiendo los botones en cuadrados cada vez mayores, como indica la figura. Después de formar el cuadrado de lado 6, vemos que no podemos completar el cuadrado siguiente, pues para



$$\sqrt{46}=6$$

$$R=10$$

$$46=6^2+10$$

ello haría falta añadir una fila y una columna y además un botón para completar la esquina de arriba. O sea, harían falta $6 \cdot 2+1=13$ botones.

Ahora bien, solamente nos quedan 10 botones, ya que

$$46=6^2+10$$

A este número de botones sobrante, con el que no se puede completar un cuadrado mayor, se le llama *resto* de la raíz cuadrada. Se verifica que

$$10=46-6^2$$

Resto de la raíz cuadrada de un número es la diferencia entre dicho número y el cuadrado de su raíz cuadrada entera.

El resto de $\sqrt{147}$ es $147-12^2=147-144=3$.

El de $\sqrt{175}$ es $175-13^2=175-169=6$.

93. Propiedad del resto de la raíz cuadrada.—Para pasar del cuadrado de lado 6 al cuadrado de lado 7 necesitábamos añadir

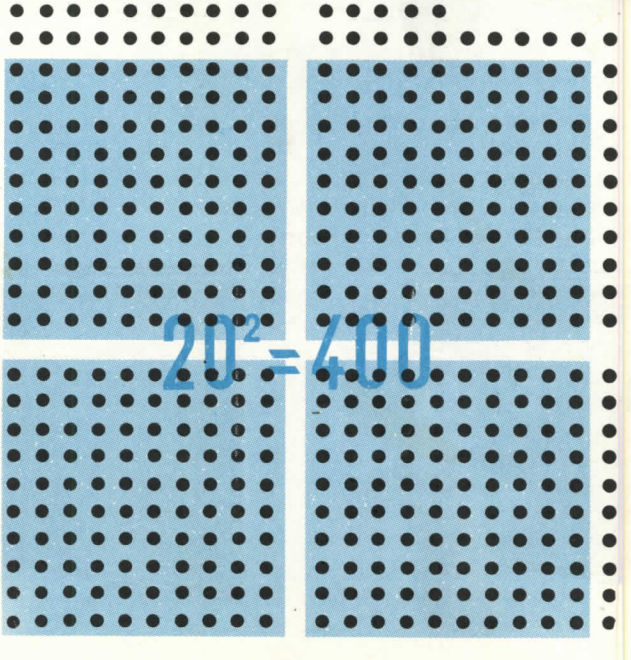
$2 \cdot 6+1=13$ botones. Por tanto, *la diferencia entre los cuadrados de dos números consecutivos es igual al doble del menor más uno.*

Ya que el resto de la raíz es un número de botones que no permite completar el cuadrado siguiente al obtenido, queda demostrado que:

El resto de la raíz cuadrada de un entero es menor que el duplo de la raíz más uno.

94. Cálculo de raíces cuadradas.—Se trata de hallar $\sqrt{456}$. Tomamos 456 perdigones y vamos formando con ellos cuadrados cada vez mayores, como se ha explicado anteriormente. Ya tenemos formado uno de lado 10. Es evidente que con los 456 perdigones podemos obtener 4 cuadrados iguales a éste, los cuales componen un cuadrado de lado 20. Pero observemos que $2=\sqrt{4}$, o sea, *la cifra de decenas de la raíz es igual a la raíz entera del número de centenas del radicando.*

Para formar otro cuadrado mayor tenemos que añadir 20 en fila y otros tantos en columna, o sea, $2 \cdot 20=40$, y además completar la esquina de arriba. Luego el número de filas que podemos



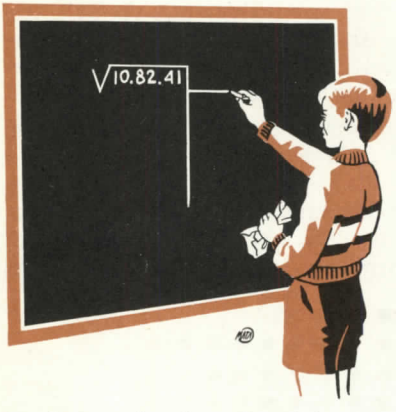
añadir será a lo más el cociente entre el resto $456-400=56$ y el duplo de la raíz hallada $2 \cdot 20=40$. Dicho cociente vale 1, y se ve que sobran 15 perdigones.

Por tanto, $456=21^2+15$. La raíz entera es 21 y el resto es 15.

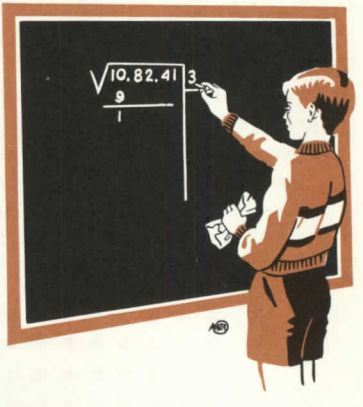
De este ejemplo y otros parecidos que se pueden hacer se deduce la siguiente REGLA.

EJEMPLO. Hallar $\sqrt{108.241}$.

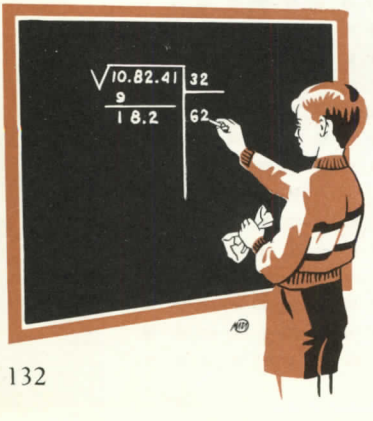
1.º Se divide en grupos de dos cifras, a partir de la derecha.



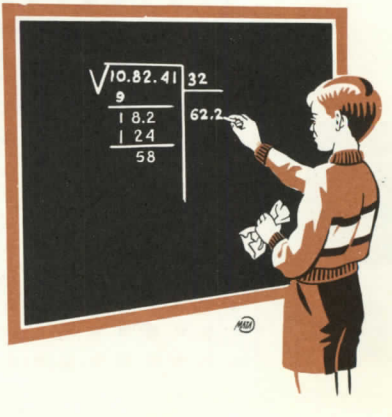
2.º Se extrae la raíz cuadrada del grupo de la izquierda, y de éste se resta el cuadrado de la cifra hallada.



3.º A la derecha del resto se baja el grupo siguiente, se separa la cifra de la derecha, y a la parte de la izquierda se la divide por el duplo de la raíz hallada.

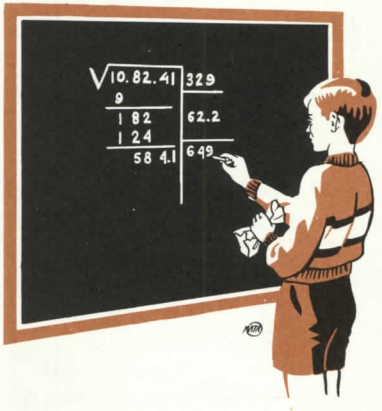


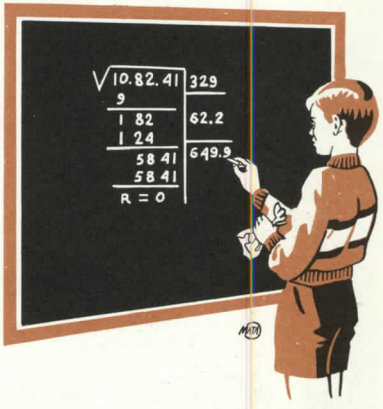
4.º El número formado por el divisor y el cociente (62) se multiplica por éste (2), y el producto se resta del dividendo (182).



5.º Se baja el grupo siguiente (41), y separando la cifra de la derecha (1) la parte de la izquierda (584), se divide por el duplo de la raíz hallada (64).

6.º El producto de 649 por 9 se resta del dividendo (5841). El resto que se obtiene es nulo.





95. Prueba de la raíz cuadrada.—Al cuadrado de la raíz cuadrada se añade el resto; la suma debe ser igual al número dado.

NOTA.—Conviene comprobar cada resto parcial y el último resto. Cada uno de ellos debe ser inferior o igual al doble del número escrito en este momento en la raíz (núm. 16). En el último ejemplo se tiene:

$$1 < 6; \quad 58 < 64; \quad 0 < 658$$

CALCULO MENTAL

- *Halla* mentalmente las raíces cuadradas de:

  100, 400, 900, 1600, 225, 12100, 289

- *Halla* las raíces cuadradas enteras de:

  89 127, 190, 205, 408, 925, 1610

- *Expresa* oralmente, en forma de raíz, las igualdades siguientes:

  $15^2 = 225$; $16^2 = 256$; $11^2 = 121$

- *Expresa* oralmente, en forma de potencia, las siguientes igualdades:

$$17=\sqrt{289}\,; \qquad \sqrt{625}=25\,; \qquad \sqrt{1024}=32$$

- *Calcula* x en las igualdades siguientes:

$$\sqrt{x}=14\,; \qquad \sqrt{x}=11\,; \qquad x^2=100\,; \qquad x^2=169$$
$$\sqrt{x}=16\,; \qquad x^2=400$$

- *Di* en qué cifras puede acabar un número que sea cuadrado perfecto.

- *Comprueba* que la radicación no tiene la propiedad distributiva respecto de la suma o de la diferencia. Emplea los siguientes ejemplos:

$$¿\,5=\sqrt{9+16}=\sqrt{9}+\sqrt{16}\,?$$
$$\sqrt{144+25}=?\,; \qquad \sqrt{289-225}=?\,; \qquad \sqrt{625-225}=?$$

- *Di* qué condición deben cumplir los números terminados en cero para ser cuadrados perfectos. ¿Es cuadrado perfecto el 1000? ¿Y el 10000?

EJERCICIOS

Hallar la raíz cuadrada de:

1. 361.	**6.** 1849.	**11.** 37249.	**16.** 501264.
2. 529.	**7.** 2304.	**12.** 53824.	**17.** 819025.
3. 841.	**8.** 3841.	**13.** 19600.	**18.** 2819041.
4. 961.	**9.** 5329.	**14.** 95481.	**19.** 18671041.
5. 1369.	**10.** 3364.	**15.** 549081.	**20.** 13704804.

21. Con 3056 baldosas cuadradas se forma un cuadrado; ¿cuántas habrá en cada lado y cuántas sobrarán?

22. ¿Cuántos números enteros hay comprendidos entre 243^2 y 244^2?

23. Con 25 baldosas más, una habitación cuadrada tendría una baldosa más por lado. ¿Cuántas tiene?

24. ¿Cuál es el menor número entero que hay que añadir a 5980 para tener un cuadrado perfecto?

25. Con las bolas que tenía, un niño formó un cuadrado de 8 filas y 8 columnas, y le sobraron 3 bolas. ¿Cuántas tenía?

26. Halla un número cuya raíz cuadrada entera es 55 y el resto de la raíz es 70.

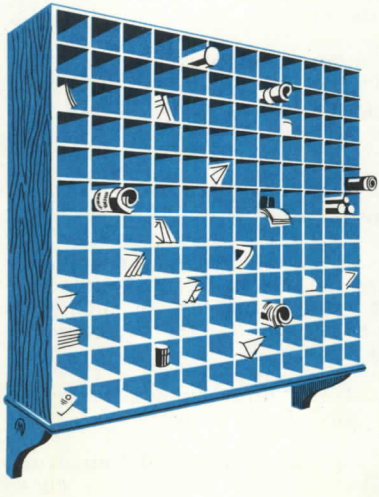
27. Un terreno cuadrado tiene 3721 áreas de superficie. ¿Cuánto mide el perímetro de dicho terreno?

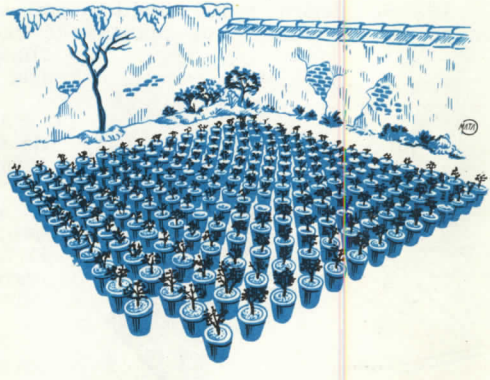
28. Halla la raíz cuadrada entera y el resto de 40117.

29. La suma de los cuadrados de dos números es 9700; si el menor de dichos números es 48, ¿cuál es el mayor?

30. Un casillero cuadrado de cartas tiene 12 casillas de lado. Resultando pequeño, se le quiere añadir una casilla más por cada lado. ¿Cuántas casillas habrá que añadir?

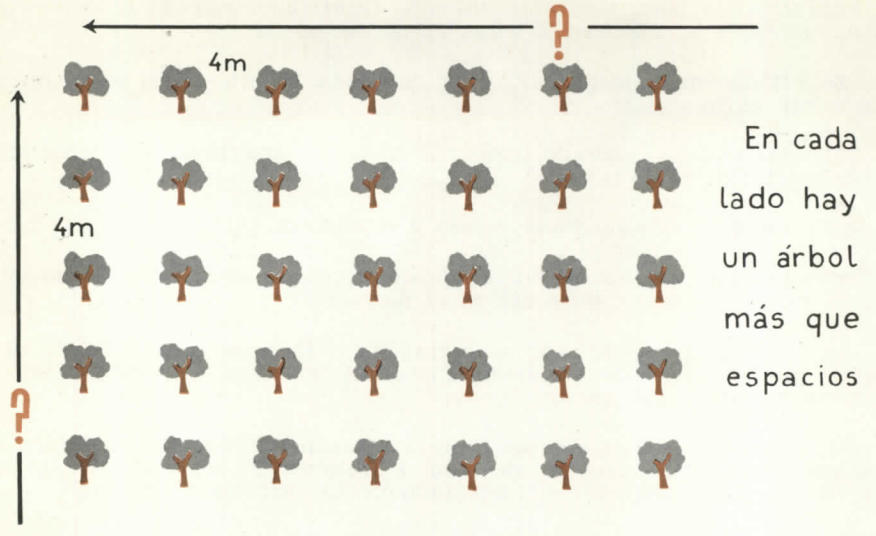
31. Un jardinero colocó sus macetas igualmente espaciadas y formó un cuadrado de 14 macetas de lado, sobrándole 12 macetas. ¿Cuántas necesitará para completar un cuadrado de 15 macetas de lado?





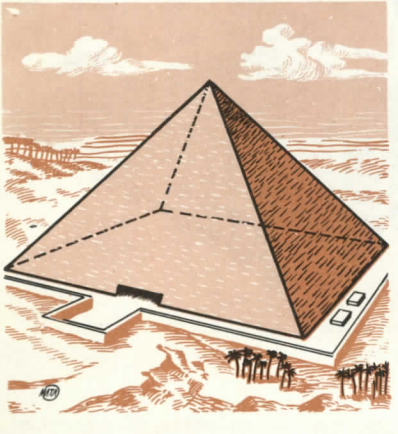
32. En un jardín se tienen 149 plantas, que se quieren disponer en filas, de modo que el número de plantas de cada fila sea igual al número de filas. ¿Cuántas plantas habrá por fila y cuántas sobran?

33. Los cuadrados de dos números suman 20417 y el menor es 76. ¿Cuál es el mayor?



34. Un cafetal cuadrado tiene 324 dam² de área. ¿Cuántas plantas contiene, sabiendo que distan 4 m una de otra?

35. Se tienen 5684 arbolitos que se quieren plantar en filas, de modo que el número de plantas de cada fila sea igual al número de filas. ¿Cuántos arbolitos habrá por fila y cuántos sobran?



36. ¿Cuál es la longitud del lado de un campo cuadrado cuya área es 1225 m²?

37. Halla el número de plantas que hay en un jardín, sabiendo que la raíz cuadrada entera de dicho número es 21, y que el resto de la raíz es 17.

38. Un campo cuadrado de 196 áreas, ¿qué lado tiene?

39. ¿Cuál es el lado del cuadrado equivalente a un rectángulo cuyas dimensiones son 25 m y 3481 m? (*Equivalente* significa de igual área.)

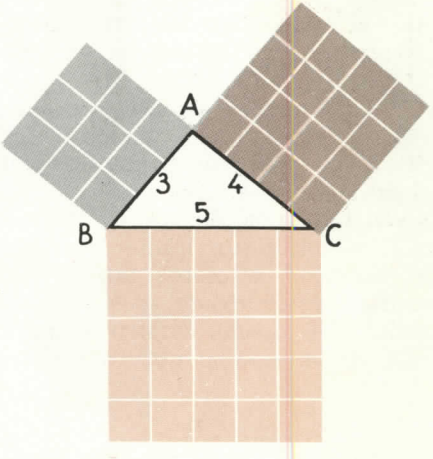
40. La gran pirámide de Egipto, de base cuadrada, ocupa una extensión de 5 hectáreas, 60 áreas y 70 centiáreas. ¿Cuál es el lado de la base?

41. Tomándose la mitad del cuadrado de las pesetas que llevo resultan 1800 pesetas. ¿Cuántos litros de vino de 6 pesetas podré comprar?

19

Teorema de Pitágoras

96. Teorema de Pitágoras.—Construyamos dos rectas perpendiculares AB y AC, y tomemos $AB = 3$ cm, $AC = 4$ cm. Unamos ahora B con C. Midiendo BC con la regla, veremos que mide 5 cm. Construyamos los cuadrados sobre los tres lados. Pronto observaremos que el construido sobre la hipotenusa BC, tiene $5^2 = 25$ cm^2 de área; el cuadrado construido sobre el cateto AC tiene $4^2 = 16$ cm^2, y el construido sobre el cateto AB mide $3^2 = 9$ centímetros cuadrados.



Observa que se puede recortar en cuadraditos los dos cuadrados construidos sobre los catetos, y con ellos formar un cuadrado igual al construido sobre la hipotenusa; o sea, que

$$16 + 9 = 25; \qquad 4^2 + 3^2 = 5^2 \qquad (1)$$

Este resultado se puede enunciar de la siguiente manera:

El cuadrado de la medida de la hipotenusa de un triánguo rectángulo es igual a la suma de los cuadrados de las medidas de los catetos

97. Equivalencia de figuras.—En la figura anterior se dice que el cuadrado construido sobre la hipotenusa es la *suma* de los cuadrados construidos sobre los catetos. Y uno de éstos es la *diferencia* entre el construido sobre la hipotenusa y el otro.

También se dice que el cuadrado construido sobre la hipotenusa

tiene la misma extensión o *es equivalente* a los dos cuadrados construidos sobre los catetos.

Dos figuras tienen la misma extensión o son equivalentes cuando pueden obtenerse como suma o diferencia de figuras iguales.

Sabemos que una figura es igual a otra cuando se pueden superponer. Y que una figura es suma de otras dos cuando resulta de poner éstas una al lado de otra. Luego la extensión de las figuras es una magnitud medible, que se denomina *área* de las mismas. *Area de una figura es la medida de su extensión.*

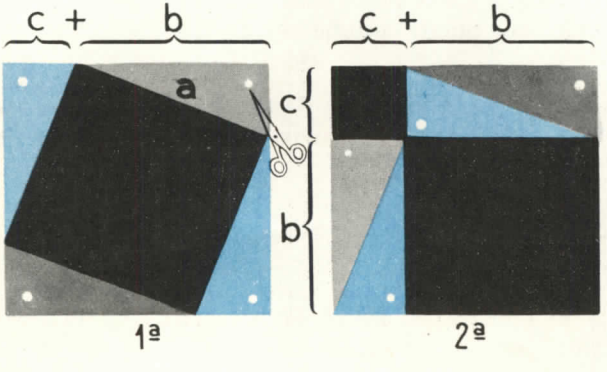
Del mismo modo que los segmentos se miden con uno fijo, que se toma como unidad, así las figuras se miden con un cuadrado de lado unidad. El número de cuadrados unidad y partes alícuotas del mismo que encierra una figura mide su *área.*

Figuras equivalentes son las que tienen igual área.

La Geometría nos da reglas para determinar el área de las figuras sin necesidad de llevar sobre la misma una plantilla cuadrada. Así, el curso pasado estudiamos las fórmulas que dan el área del paralelogramo, triángulo, polígono regular, cuadrado y rectángulo.

98. Una demostración experimental del teorema de Pitágoras.— Por su importancia, vamos a dar una demostración del teorema de Pitágoras para un triángulo rectángulo cualquiera, y no sólo para el de lados 3, 4 y 5.

Disponemos de un cartabón cuya hipotenusa mide a centímetros, siendo a un número cualquiera, y cuyos catetos miden b y c centímetros, números también cualesquiera. Construyamos en cartulina un cuadrado que tenga por lado la suma $b+c$. Cortemos ahora del mismo cuatro triángulos iguales al cartabón, colocando éste en las cuatro esquinas del cuadrado, como indica la figura 1.ª



La figura que queda es un cuadrado, ya que sus cuatro lados son iguales a la hipotenusa a del cartabón, y sus ángulos son rectos, porque resultan de quitar de un llano los dos ángulos agudos de un triángulo rectángulo, que suman un recto. Construyamos otro cuadrado exactamente igual al anterior y recortemos los cuatro triángulos rectángulos en la forma que indica la figura 2.ª Entonces los trozos sobrantes son dos cuadrados cuyos lados son los catetos del cartabón. Como, según la definición dada de equivalencia, las diferencias de figuras iguales son equivalentes, resulta que

El cuadrado construido sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo es equivalente a la suma de los cuadrados construidos sobre los catetos.

99. Ejemplos de aplicación.—EJEMPLO 1.º *La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide* 17 *m y un cateto* 15 *m. Hallar el otro cateto.*

Solución: Aplicando el teorema de Pitágoras y llamando x a la longitud del cateto desconocido:

$$15^2 + x^2 = 17^2$$

o sea:

$$x^2 = 17^2 - 15^2 = 289 - 225 = 64$$

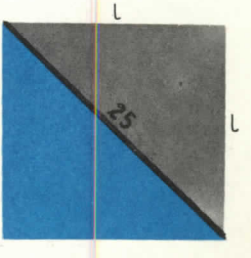
De donde:

$$x = \sqrt{64} = 8 \text{ m}$$

EJEMPLO 2.º *Hallar el área de un cuadrado cuya diagonal mide* 25 *decímetros.*

Solución: Dicha diagonal divide al cuadrado en dos triángulos rectángulos isósceles cuyos catetos son los lados y la diagonal es la hipotenusa.

Luego, llamando l el lado del cuadrado, en virtud del teorema de Pitágoras:



$$25^2 = l^2 + l^2 = 2l^2$$

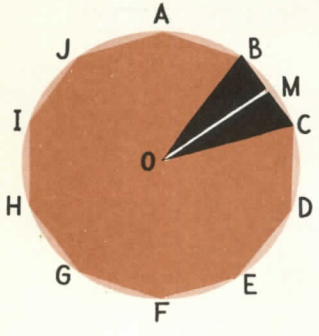
o sea:

$$l^2 = \frac{25^2}{2}$$

y el área del cuadrado vale, por tanto:

$$S = l^2 = \frac{25^2}{2} = \frac{625}{2} = 312{,}5 \text{ dm}^2$$

100. Construcción de polígonos regulares.—Supongamos que hemos dividido una circunferencia en un cierto número de partes iguales, por ejemplo, 10.



Unamos ahora los puntos de división, cada uno con el siguiente. El polígono que así resulta es regular, pues tiene los lados iguales como cuerdas de arcos iguales; y los ángulos iguales, por ser inscritos en arcos iguales.

Tenemos así un método fácil para construir polígonos regulares, siempre que sepamos dividir la circunferencia en partes iguales.

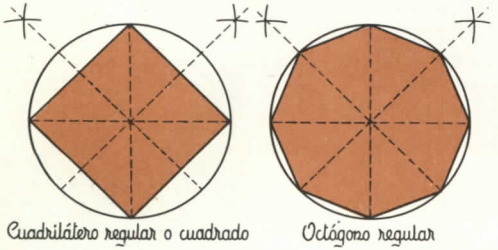
101. Definiciones.—El polígono construido en el número anterior se dice que está *inscrito* en la circunferencia: todos sus vértices están en dicha circunferencia. Esta se dice *circunscrita* al polígono.

Radio de un polígono regular es el de la circunferencia circunscrita al mismo. Así, *OB* y *OC* son radios.

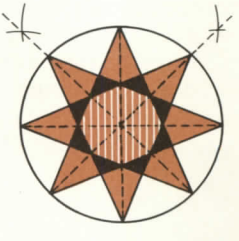
Centro de un polígono regular es el centro *O* de la circunferencia circunscrita al mismo.

Apotema de un polígono regular es el segmento de perpendicular, desde el centro. a uno cualquiera de los lados; por ejemplo, *OM*.

102. Construcción del cuadrado y del octógono regulares.—Traza con la escuadra o por plegado los diámetros perpendiculares y después las bisectrices de los ángulos rectos en la circunferencia *O*. Así, la circunferencia queda dividida en 8 partes iguales.



Cuadrilátero regular o cuadrado — Octógono regular

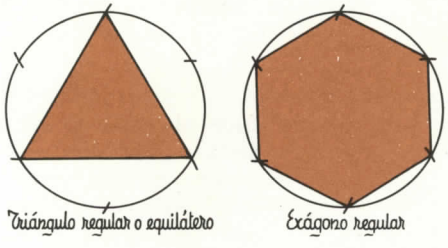


Si unimos los puntos de división de dos en dos resulta el *cuadrado*, y si los unimos de uno en uno se obtiene el *octógono regular*.

Calca los dos polígonos así construidos en papel transparente, y por rotación de éste alrededor del centro, comprueba que todos sus lados y ángulos son iguales.

Uniendo los puntos de división de tres en tres obtenemos el *octógono regular estrellado.*

103. Construcción del triángulo y exágono regulares.—Traza una circunferencia y lleva el radio como cuerda sobre la misma cuantas veces puedas. Verás que cabe exactamente 6 veces.

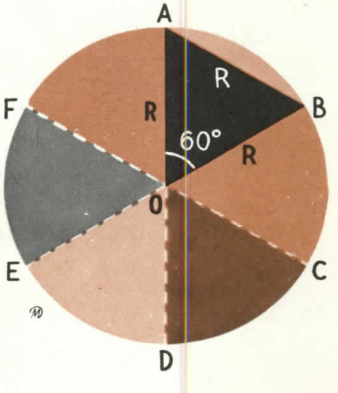


Uniendo de dos en dos los puntos de división se obtiene *el triángulo regular o equilátero.*

Uniendo los puntos de división de uno en uno se obtiene el *exágono regular.*

Comprueba, como antes, que todos sus ángulos son iguales.

¿Ha sido una casualidad que el radio, llevado como cuerda, quepa exactamente seis veces, sobre la circunferencia, o hay alguna razón profunda para ello? Efectivamente, el triángulo *AOB* formado por dicha cuerda y dos radios es equilátero, y, por tanto, equiángulo. Así, el ángulo central *AOB* mide

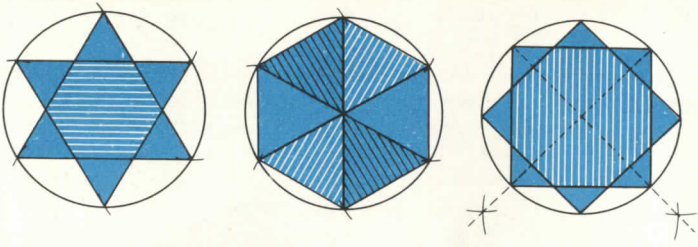


$$\frac{180^\circ}{3} = 60^\circ$$

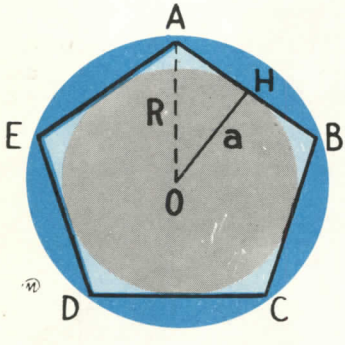
es decir, la sexta parte de 360°.

Por tanto, si llevamos seis veces dicha cuerda, cerraremos el polígono regular.

Las construcciones anteriores se prestan a bellos motivos ornamentales, que puedes fácilmente reproducir, como los siguientes:



104. Circunferencia inscrita en un polígono.—En los casos anteriores hemos comprobado que el centro del polígono regular dista lo mismo de todos los lados, puesto que al girar alrededor de dicho centro cada uno puede coincidir con todos los demás. Dicha distancia común es la apotema del polígono. La circunferencia que tenga esta apotema por radio será tangente a todos los lados, y se llama *inscrita al polígono*. Este se dice que está *circunscrito* a aquella.



Todo polígono regular puede considerarse circunscrito a una circunferencia que tiene por radio la apotema.

105. Lado y apotema del cuadrado.—Trazando dos diámetros AC y BD perpendiculares entre sí y uniendo sus extremos, se obtiene un cuadrado (núm. 102).

Del triángulo rectángulo AOB se obtiene:

$$\overline{AB}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{OB}^2 = 2\overline{OA}^2$$

de donde,

$$AB = OA\sqrt{2} \qquad (2)$$

o sea, llamando l_4 el lado del cuadrado

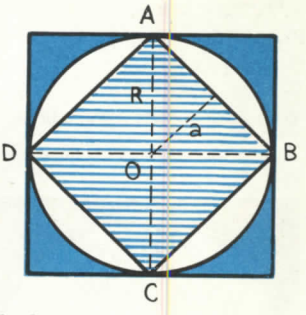
$$\boldsymbol{l_4 = R\sqrt{2}} \qquad (3)$$

La figura adjunta nos dice que la apotema del cuadrado es:

$$a_4 = \frac{l_4}{2}$$

o sea:

$$\boldsymbol{a_4 = \frac{R\sqrt{2}}{2}} \qquad (4)$$



La fórmula (3) dice: *El lado del cuadrado inscrito es igual al radio multiplicado por* $\sqrt{2}$.

La fórmula (4) dice: *La apotema del cuadrado inscrito es igual a la mitad del lado del mismo.*

106. Lado y apotema del exágono.—Según el número 99 se sabe que el lado del exágono regular vale

$$\boldsymbol{l_6 = R} \qquad (5)$$

Por tanto, para inscribir un exágono regular en una circunferencia es suficiente llevar seis veces sobre la circunferencia una abertura de compás igual al radio, y unir los puntos de división consecutivos. La apotema *OM* cae en el punto medio del lado *CD*. Luego:

$$OM = \sqrt{OD^2 - MD^2} = \sqrt{R^2 - \left(\frac{R}{2}\right)^2} = \sqrt{R^2 - \frac{R^2}{4}} =$$

$$= \sqrt{\frac{4R^2 - R^2}{4}} = \sqrt{\frac{3R^2}{4}} = \frac{R}{2}\sqrt{3}$$

o sea:

$$\boldsymbol{a_6 = \frac{R}{2}\sqrt{3}} \qquad (6)$$

107. Lado y apotema del triángulo.—Uniendo de dos en dos los vértices del exágono se obtiene el triángulo equilátero inscrito *ACE*. El triángulo rectángulo *ACD* da:

$$\overline{AC}^2 = \overline{AD}^2 - \overline{CD}^2 = 4R^2 - R^2 = 3R^2$$

de donde:

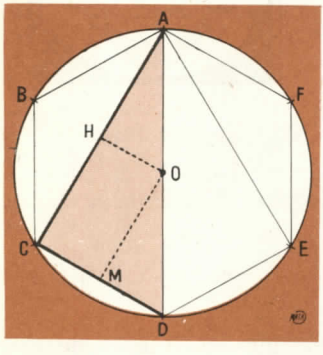
$$AC = R\sqrt{3}$$

o sea, el lado del triángulo equilátero vale

$$l_3 = R\sqrt{3} \qquad (7)$$

La apotema $OH = a_3$ del triángulo y la mitad CM del lado del exágono son paralelas entre paralelas. Luego, tendremos:

$$OH = CM = \frac{R}{2}$$



o sea:

$$a_3 = \frac{R}{2} \qquad (8)$$

EJEMPLO 1.º *Calcula el radio de la circunferencia circunscrita a un triángulo equilátero cuyo lado mide* 12 *cm.*

Solución: Aplicando la fórmula (7) se obtiene:

$$12 = R\sqrt{3}$$

$$R = \frac{12}{\sqrt{3}} = \frac{12}{1{,}73} = 6{,}92 \text{ cm}$$

EJEMPLO 2.º *Halla el lado y la apotema de un cuadrado inscrito en una circunferencia de* 10 *m de radio.*

Solución: Aplicando la fórmula (3) se obtiene:

$$l_4 = 10\sqrt{2} = 10 \cdot 1{,}414 = \mathbf{14{,}14\ m}$$

Aplicando la fórmula (4):

$$a_4 = \frac{10}{2} \cdot \sqrt{2} = 5 \cdot 1{,}414 = \mathbf{7{,}07\ m}$$

EJERCICIOS

1. La apotema de un exágono es $5\sqrt{3}$ dm. Halla uno de sus lados.

2. Si dos lados alternos de un polígono regular inscrito se prolongan hasta cortarse, los puntos de intersección son los vértices de otro polígono regular. Demuéstralo.

3. Una escalera de mano de 6,5 m de larga está apoyada contra una pared; si el pie de la escalera dista 2,5 m de la pared, ¿a qué altura alcanza?

4. Halla el tercer lado de estos triángulos rectángulos, sabiendo que las dos primeras líneas son los catetos y la tercera la hipotenusa:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
3	9	21	?	?	?	4	15	?	$\sqrt{2}$
4	12	28	24	3,5	18	?	?	$\frac{5}{2}$	$\sqrt{2}$
?	?	?	25	9,1	19,5	8	25	5	?

5. Halla la altura de un triángulo isósceles cuya base es de 4,2 m y cuyos lados iguales son de 7,5 m.

6. El lado de un triángulo equilátero es de 5 cm. Halla la altura.

7. Calcula la longitud de la diagonal de un cuadrado cuyo lado mide:
a) 8 dm; b) 51 cm; c) 1,5 m.

8. Halla la altura de un triángulo equilátero cuyo perímetro es:
a) 8,1 dm; b) 24 cm.

9. Calcula el lado de un rombo cuyas diagonales miden 48 y 90 mm, respectivamente.

10. Halla el lado de un cuadrado cuya diagonal mide 16 mm.

11. Los lados contiguos de un rectángulo miden 16 y 30 dm. ¿Cuánto mide su diagonal?

12. Calcula el lado y la apotema de un triángulo equilátero cuyo radio mide 9 dm.

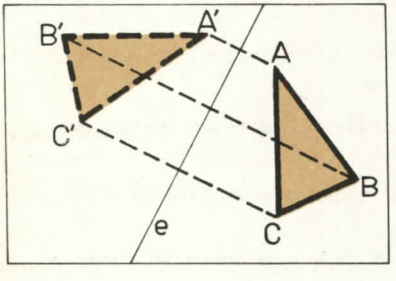
13. El lado de un cuadrado inscrito en una circunferencia mide 10 m. Halla el radio de ésta.

14. ¿A qué altura toca a una pared una escalera de 10 m, si su pie dista 6 m de la pared?

20

Movimientos del plano sobre sí mismo

108. La simetría axial.—Toma una cuartilla de papel transparente y dibuja en ella un triángulo *ABC*. Dobla ahora la hoja de modo que éste quede completamente tapado. Calca por transparencia en la parte superior de la hoja el triángulo *ABC*, que queda en la parte inferior. Así obtienes el triángulo *A'B'C'*. Al desdoblar la hoja, aparece esta copia en distinta cara que la figura original. La vemos sólo por transparencia, y por eso la dibujamos en línea discontinua.



Las dos figuras, *ABC* y *A'B'C'*. se llaman **simétricas:** *ABC* es simétrica de *A'B'C'* y ésta lo es de aquélla.

El doblez *e* que hemos dado se llama **eje de simetría.** La transformación realizada para obtener una figura a partir de la otra se denomina **simetría axial,** o simetría respecto a un eje *e*.

La figura inicial *ABC* se llama **original,** y su copia *A'B'C'* se llama **imagen,** lo mismo que en las correspondencias entre conjuntos.

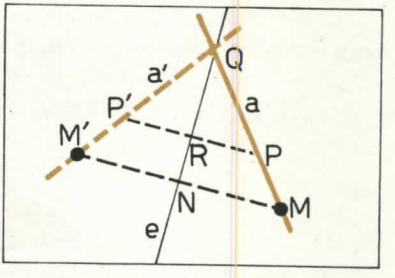
En realidad, la simetría axial es una correspondencia punto a punto entre las dos figuras original e imagen: a cada punto de la figura original le hace corresponder el punto de la figura imagen que se superpone con él en el doblado.

Toda correspondencia punto a punto entre dos figuras se denomina **transformación geométrica.**

La noción de transformación geométrica domina la Geometría moderna, como la noción de función domina la Aritmética y el Algebra.

La simetría axial no es más que un caso particular o ejemplo de transformación geométrica.

109. Propiedades de la simetría axial.—En una hoja de papel transparente traza una recta a y halla por calco su simétrica, respecto a un eje e. Hallas otra a'. ¿Qué propiedades tiene ésta? Corta a la recta a en un punto Q del eje e, y, además, dicho eje es bisectriz del ángulo que forman a y a'. En efecto, los ángulos MQN y $M'QN$ se superponen en el doblado. **Dos rectas simétricas a y a' se cortan en un punto del eje e, y, además, éste es bisectriz del ángulo que forman a y a'.**

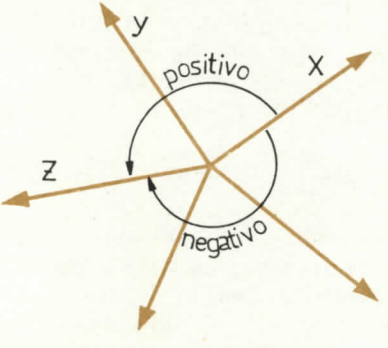


Consideremos dos puntos simétricos M y M'. Tracemos la recta MM': es perpendicular al eje e, ya que los ángulos en N son rectos, pues se superponen en el doblado. Además, $NM = NM'$, por la misma razón.

Dos puntos simétricos están situados en una perpendicular al eje e y a igual distancia del mismo.

110. Sentidos en el plano.—Vimos (núm. 29) que para orientar una recta basta dar en ella dos puntos y decir cuál es *anterior* y cuál *posterior*. A cada una de las dos posibilidades corresponden los dos *sentidos de la recta*.

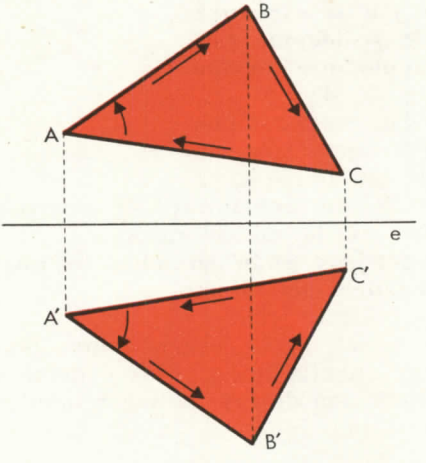
Orientar el plano es ordenar el conjunto de todas las semirrectas de mismo origen O.



Para conseguirlo basta fijar el orden de tres de las semirrectas, por ejemplo, las x, y, z. Las ordenaciones (x, y, z), (y, z, x) y (z, x, y) definen un *sentido del plano*, y las ordenaciones (z, y, x), (y, x, z) y (x, z, y) definen otro sentido del plano opuesto al anterior.

Hemos definido así dos sentidos en el plano. El sentido de giro de las agujas de un reloj convenimos en llamarlo *negativo*, y el opuesto *positivo*, según se indica en la figura.

111. Figura simétrica de un triángulo.—*Las simetrías axiales transforman triángulos en triángulos iguales*, ya que tienen sus tres



lados respectivamente iguales. Por tanto, *transforman los ángulos en ángulos iguales, pero de sentido contrario.* Obsérvese en la figura, por ejemplo, el ángulo A y su homólogo A'.

También *cambian el sentido de recorrido de los triángulos:* el triángulo ABC se recorre en el sentido negativo, el de las agujas del reloj, y el triángulo $A'B'C'$ en el sentido positivo, contrario a las agujas del reloj.

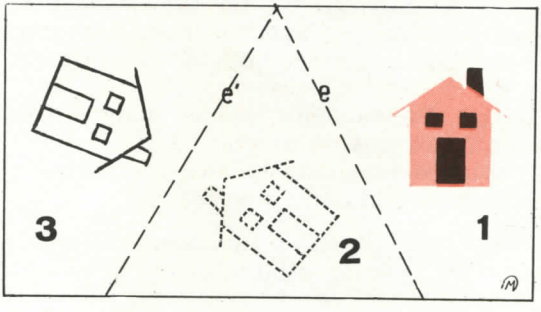
Lo mismo sucede con un polígono o una figura plana cualquiera.

112. Producto de simetrías.—Dibuja la figura 1 en tu hoja de papel transparente. Halla su simétrica respecto al eje e, calcando por transparencia. Obtienes así la figura 2. Halla ahora la simétrica de ésta respecto al eje e', obteniéndose la figura 3.

¿Están las figuras 1 y 3 en la misma o en distinta cara? Decimos que hemos pasado de la figura 1 a la figura 3 mediante la **transformación producto de las simetrías** de ejes e y e'.

La figura 3 es la **transformada** de la figura 1 en el producto de las simetrías de ejes e y e'.

Dobla por el eje e y en seguida por el eje e'. Verás que las figuras 1 y 3 se superponen, ya que ambas se han superpuesto con la 2. Entre las figuras 1 y 3 existe una correspondencia punto a punto: a cada punto de 1 le hacemos corresponder el que se superpone con él en el doblado. Esta transformación geométrica se de-



nomina **producto de dos simetrías,** ya que la superposición se logra mediante dos dobleces.

EJEMPLO. Dibuja tres ejes de simetría y un segmento.

Halla el transformado del mismo en el producto de las tres simetrías. ¿Aparecerá dicho transformado en la misma o en distinta cara que el segmento original?

113. Los movimientos en el plano.—Llamaremos **movimientos** a las transformaciones producto de cualquier número de simetrías. En particular, una única simetría se llama también movimiento.

El producto de un número par de simetrías se llama **movimiento directo.** Entonces las figuras transformada y original están dibujadas en la misma cara del papel.

El producto de un número impar de simetrías se llama **movimiento inverso.** Entonces las figuras transformada y original aparecen dibujadas en distinta cara del papel.

El movimiento inverso cambia el sentido de recorrido de las figuras, según se vio en el número 111. De ahí su nombre, ya que invierte el sentido.

El movimiento directo, en cambio, conserva el sentido de las figuras.

EJEMPLOS. 1.º ¿Qué clase de movimiento es el producto de

tres simetrías?, ¿de dos simetrías?, ¿de cuatro?, ¿de cinco simetrías?

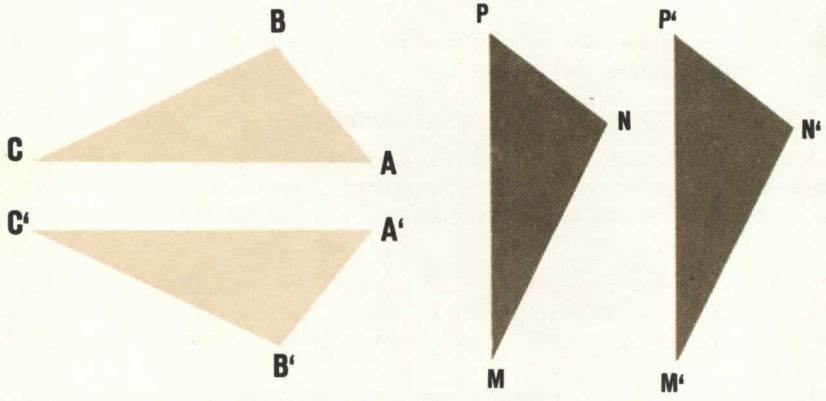
2.º Halla el transformado de un ángulo en el movimiento producto de cuatro simetrías de ejes dados. ¿Estará en la misma cara que el ángulo original?

114. Igualdad de figuras.—Vimos en Primer Curso que dos figuras son **iguales** cuando se pueden superponer mediante un movimiento; o sea, existe un movimiento que transforma una en otra.

Dos figuras son **directamente iguales** cuando se pueden superponer mediante un movimiento directo.

Dos figuras son **inversamente iguales** cuando se puede pasar de una a otra con un movimiento inverso.

EJERCICIOS. 1. ¿Son directa o inversamente iguales las dos figuras dibujadas en a)?, ¿y las dibujadas en b)?



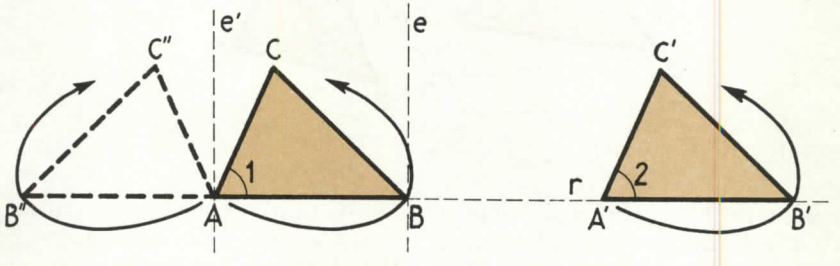
a) b)

2. ¿Con cuántas simetrías podrías superponer las dos figuras de a)?, ¿y con cuántas las de b)?

3. Comprueba que la igualdad de figuras geométricas es una relación de equivalencia, o sea, cumple las tres propiedades: reflexiva, simétrica y transitiva.

115. La traslación en el plano.—Dibuja un triángulo *ABC*. Coloca sobre la cuartilla un papel transparente y calca dicho triángulo. Desliza después el papel transparente en la dirección marcada por

la recta r que contiene el lado AB. En la nueva posición $A'B'C'$, calca este triángulo sobre la cuartilla. El triángulo ABC se ha transformado así en el triángulo $A'B'C'$. Vamos a demostrar que esta transformación es un *movimiento directo*. En efecto, dobla la cuartilla de modo que A' caiga sobre A. Esta simetría, cuyo eje es la recta e, transforma el triángulo $A'B'C'$ en el $AC''B''$. Dobla de nuevo por la recta e'. Verás que B'' caerá en B y C'' coincidirá con C. Se ha logrado la superposición de los dos triángulos mediante un producto de dos simetrías, o sea, mediante un movimiento directo. Esta transformación se llama **traslación.**



Las dos figuras ABC y $A'B'C'$ tienen sus lados y ángulos respectivamente iguales, y además están colocados en ambas en el mismo sentido: el contrario de las agujas del reloj. Son figuras *directamente iguales.*

Las dos figuras ABC y $AB''C''$, en cambio, son *inversamente iguales*: tienen sus elementos iguales, pero colocados en orden contrario. Son transformadas una de otra mediante un movimiento inverso, o sea, mediante una simetría.

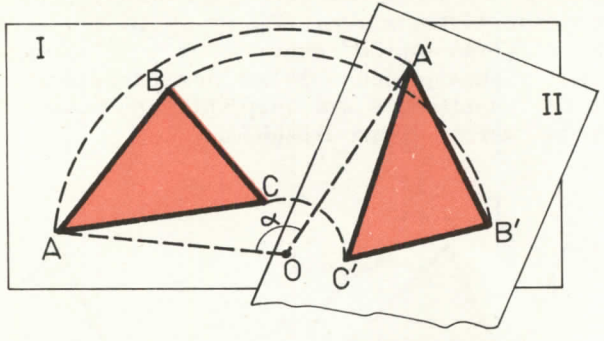
Observa que $\hat{1}=\hat{2}$, y además son correspondientes; luego $A'C'$ es paralela a AC:

Dos segmentos AC y A'C' homólogos en una traslación son iguales y paralelos.

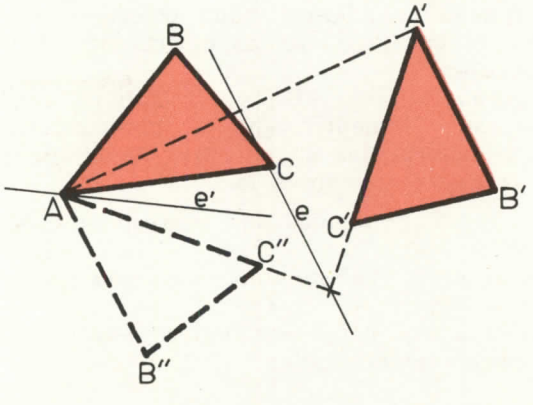
Dos triángulos o dos polígonos cualesquiera homólogos en una traslación son directamente iguales.

116. El giro en el plano.—En una hoja de papel dibuja un triángulo ABC. Coloca encima un papel transparente y calca dicho triángulo. Sujeta ahora ambos papeles con un encuadernador en un punto fijo O. Haz girar el papel transparente desde la posición inicial I hasta la II. En esta posición calca el triángulo sobre la primera hoja de papel. Resulta el triángulo $A'B'C'$. La transformación que hace corresponder al triángulo ABC el triángulo $A'B'C'$ se llama **giro del plano,** y también **rotación.**

El punto O ha permanecido *invariante* en la rotación. Se le llama **centro de giro.** La semirrecta OA ha girado hasta OA', describiendo un ángulo α, denominado **amplitud del giro,** igual al que



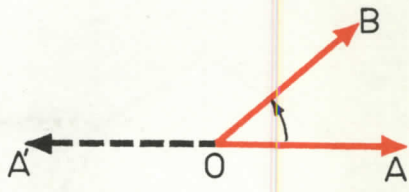
ha descrito OB hasta colocarse en OB', y también OC hasta situarse en OC'. Vamos a demostrar que *el giro es un movimiento directo*, o sea, que las dos figuras ABC y $A'B'C'$ se pueden superponer me-



diante un número par de simetrías. En efecto, doblemos primero de modo que A' caiga en A. Es la simetría de eje e, que transforma $A'B'C'$ en $AB''C''$. Doblemos a continuación por el eje e', bisectriz del ángulo $C'AC$. Los dos triángulos $AB''C''$ y ABC se superponen.

117. El ángulo como giro.—Observa en la figura primera del número anterior que el concepto de *ángulo de giro*, o amplitud de

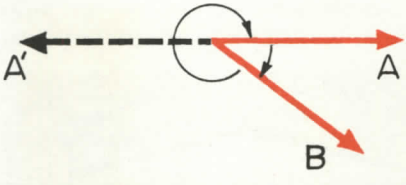
giro, difiere del concepto de ángulo dado en Primer Curso. Allí se trataba de un conjunto de semirrectas contenidas dentro de una región angular. Ahora se trata del *conjunto de semirrectas OA* desde la posición inicial hasta la final *OA'*, es decir, ahora el ángulo está *orientado*, tiene un *sentido*, que es el indicado en el dibujo por la flecha. Traza una semirrecta *OA*, fija, y una semirrecta variable *OB*, que gira alrededor de *O* en el sentido contrario a las agujas del reloj. Cuando *OB* coincide con *OA*, el ángulo *AOB* es nulo.



Después el ángulo va aumentando, considerándose siempre positivo, siendo al principio *convexo*.

Cuando *OB* viene a estar en la prolongación *OA'* de *OA*, el ángulo *AOB* es llano. Después llega a ser *cóncavo*; y cuando *OB* llega a coincidir con *OA*, se tiene el ángulo *completo*.

Se puede imaginar que *OB* continúa girando y describe un ángulo superior a una vuelta completa, por ejemplo 5 ángulos rectos, 10 ángulos rectos, etc. No es raro encontrar tales ángulos al tratar de sumar varios otros, incluso convexos. Si partiendo de la misma posición inicial, el giro se efectúa en el mismo sentido que las agujas del reloj, los ángulos se consideran *negativos*. Al conjunto de los ángulos positivos y negativos los llamaremos **ángulos orientados.**



EJEMPLOS. 1.° Traza un ángulo recto positivo.

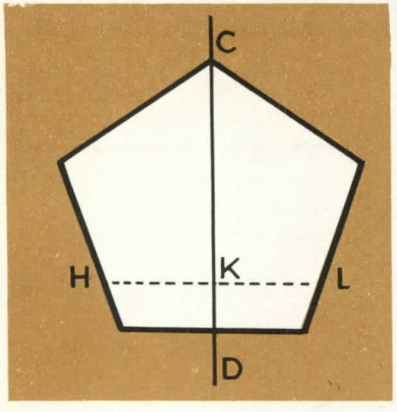
2.° Traza un ángulo recto negativo.

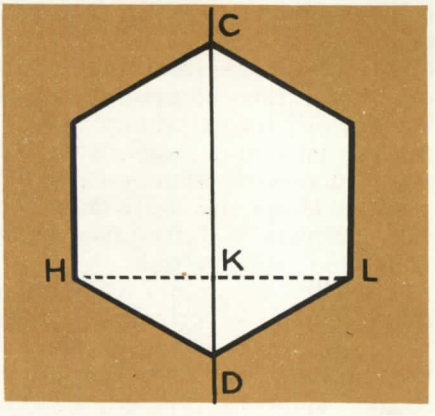
3.° Dibuja medio ángulo recto positivo y medio ángulo recto negativo.

4.° En media hora la aguja de los minutos de un reloj gira un ángulo de -2 ángulos rectos, y en tres cuartos de hora de -3 ángulos rectos.

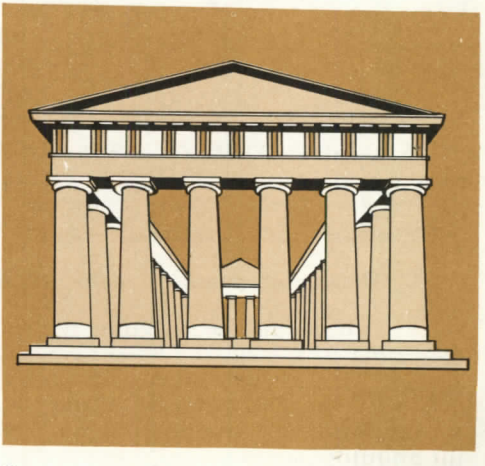
118. Figuras simétricas respecto a un eje.—*Una figura es simétrica respecto a un eje si cualquier recta perpendicular al eje corta la figura en dos puntos equidistantes del mismo.* Y, por tanto, la

mitad de la figura coincide con la otra mitad al doblarla por el eje, según se ve en las figuras.





Dios dotó a la mayor parte de los seres vivos de esta cualidad de la simetría y ésta es precisamente la que les comunica su belleza y armonía. El hombre, en sus creaciones, la ha imitado instintivamente en los edificios, monumentos y objetos de toda clase.



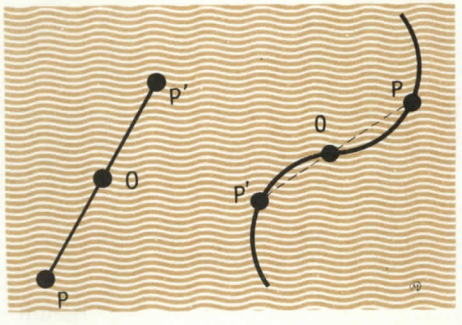
De la misma definición de figuras simétricas respecto a un eje se deduce que los ejes de simetría son bisectrices de los ángulos que forman cada dos segmentos correspondientes; que éstos son iguales, y también los ángulos correspondientes, lo cual se comprueba doblando la figura por el eje.

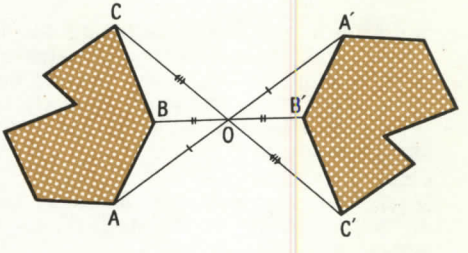
119. Simetría respecto a un punto.—*Dos puntos, P y P', se llaman simétricos respecto a otro llamado* centro de simetría, *si éste es el punto medio del segmento PP' que los une.*

Así, en la figura, los puntos P y P' son simétricos respecto del punto O.

Una figura es simétrica respecto a un punto llamado centro de simetría *si cualquier recta que pase por el centro corta a la figura en dos puntos equidistantes.* Y, por tanto, la mitad de la figura coincide con la otra mitad cuando gira 180° alrededor del centro O.

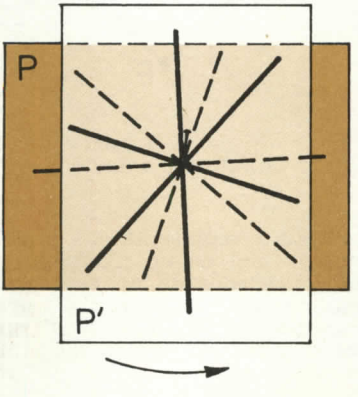
Luego los segmentos correspondientes serán paralelos e iguales, y los ángulos correspondientes tienen sus lados paralelos y dirigidos en sentido contrario y, por tanto, son iguales.

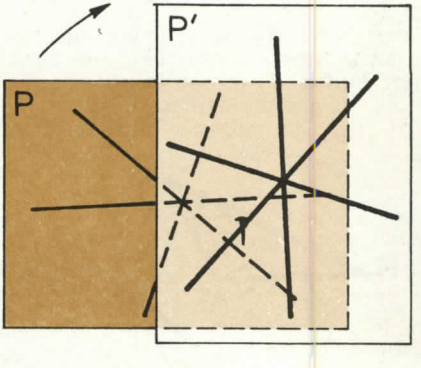




EJERCICIOS

1. En una hoja de papel, P, traza tres rectas de diferentes colores que pasen por un punto O. Calca estas rectas en una hoja P' de papel transparente y sea O' el punto en que se cortan. Haz coincidir las dos



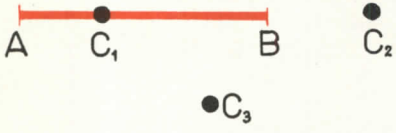


figuras y pincha con un alfiler o punta de compás en O', el punto correspondiente de O. Gira la hoja superior un cuarto de vuelta alrededor de O'.

a) Compara cada recta con su posición original. ¿Qué ángulo ha girado cada recta? ¿Algún punto permanece fijo en esta rotación?

b) Haz coincidir las dos figuras y pincha en cualquier punto que no sea el O' (Fig. b). Gira la hoja un cuarto de vuelta alrededor del nuevo eje. ¿Qué ángulo gira ahora cada recta?

c) Repite el experimento anterior usando diferentes centros de rotación y girando ángulos diferentes. Usa un transportador para medir los ángulos entre las rectas y sus imágenes en cada caso.



¿Qué conclusión sacas?

d) ¿Para qué ángulo de rotación el sentido en que se hace la rotación es indiferente?

2. a) ¿Qué le sucede al segmento AB cuando la figura gira un ángulo recto alrededor de los puntos C_1, C_2 y C_3?

b) ¿La imagen $A'B'$ es perpendicular a AB en cada caso?

c) ¿Qué puedes decir acerca de la distancia de la imagen de AB a C_3 en cualquier rotación con C_3 como centro?

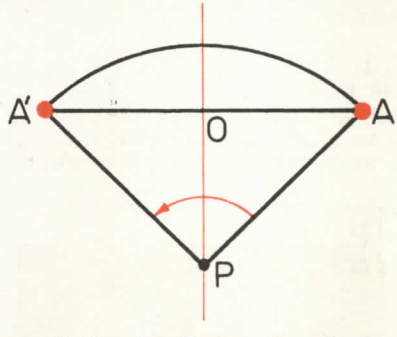
d) Si AB gira 2 rectos alrededor de C_3, ¿qué puedes decir acerca de la dirección de $A'B'$?

3. Supongamos que A' es la imagen de A después de una rotación. O, punto medio entre A y A', es el centro de una rotación que puede usarse para llevar A a A'.

a) ¿Cuál es el ángulo de rotación en este caso?

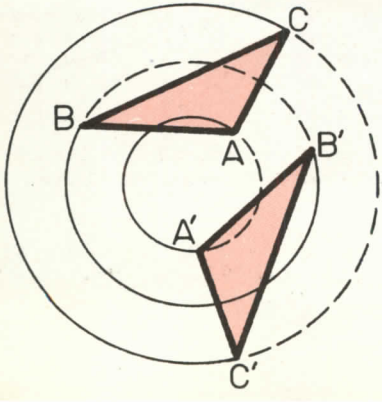
b) Halla centros de otras rotaciones que llevarían A a A' y los ángulos aproximados de rotación. ¿Cuántos centros posibles hay?

c) Si O_1 es uno de los posibles centros que has hallado en b), ¿qué puedes decir de las longitudes O_1A y O_1A'?



Por las respuestas a las cuestiones anteriores habrás visto que cualquier punto P de la mediatriz de AA' es un posible centro de rotación.

d) Haz un diseño para mostrar la posición de P (centro de rotación) si el ángulo de rotación es un recto.



4. La figura representa las posiciones inicial y final de un triángulo por la rotación alrededor de un centro fijo (las circunferencias indican las trayectorias seguidas por A, B y C). El problema es hallar el centro de rotación.

a) Copiar los triángulos ABC y $A'B'C'$ en papel transparente. ¿En qué recta debe estar O si:

1.º A se lleva a A';
2.º B se lleva a B'.

Traza estas rectas con cuidado.

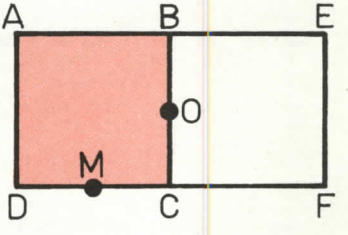
b) El punto O en que estas rectas se corten será un posible centro de rotación que lleve A a A' y B a B'. El ángulo necesario para llevar A a A' será el mismo que el que se necesita para llevar C a C'. Traza la mediatriz de CC' y mide $\widehat{CPC'}$.

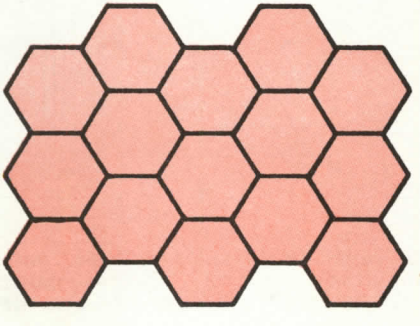
Para hallar los centros de rotación puedes utilizar el procedimiento anterior trazando las mediatrices de puntos objeto y sus imágenes. Como todas las mediatrices pasan por O, centro de rotación, es suficiente hallar la intersección de dos mediatrices cualesquiera.

5. Si se gira el cuadrado rayado de la figura un ángulo de -2 rectos alrededor de O, se le lleva a coincidir con el cuadrado no rayado. Halla el homólogo en la rotación de:

a) C; b) D; c) M.

¿Qué otros centros de rotación llevarían un cuadrado sobre el otro?



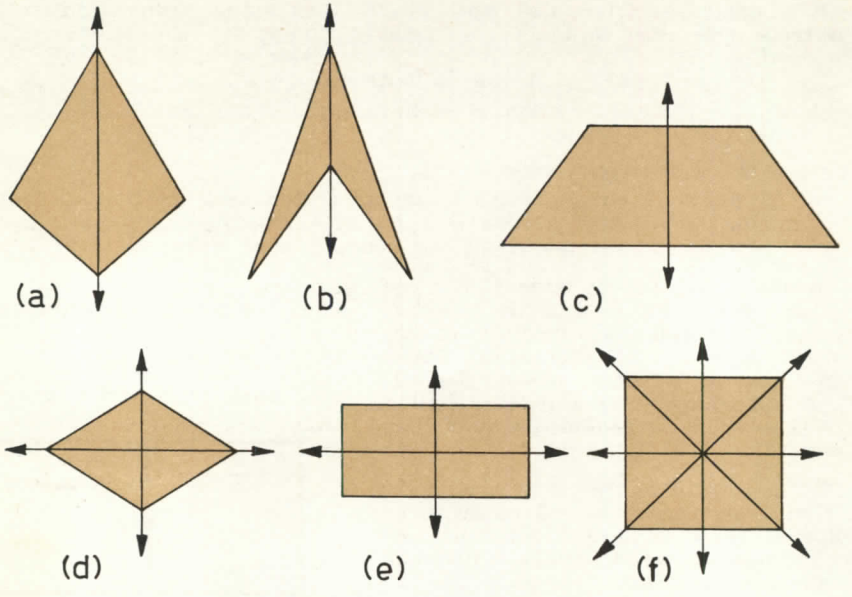


6. La figura representa un mosaico infinito de exágonos regulares. Copia la figura sobre papel transparente, haz girar ésta y halla centros de simetría en la figura.

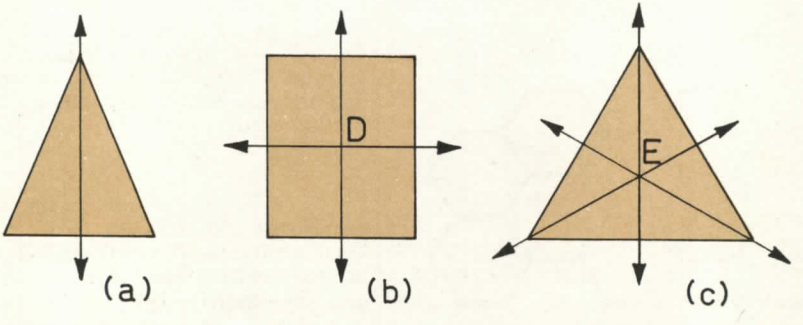
7. a) Un paralelogramo tiene centro de simetría en $(0, 0)$. Usando coordenadas rectangulares, dos de los vértices son $(4, 5)$ y $(-1, 3)$. Da las coordenadas de los otros vértices y traza el paralelogramo.

b) Si (a, b) es un vértice de un paralelogramo, con sus diagonales cortándose en $(0, 0)$, halla las coordenadas de otro vértice.

8. ¿Qué elementos de simetría tienen las figuras siguientes? Cuando tienen dos ejes de simetría, ¿qué otro elemento de simetría tienen también?



9. Las tres figuras siguientes tienen uno, dos y tres ejes de simetría. ¿Cuáles de las tres tienen también centro de simetría?



10. En el triángulo (a) de la figura, ¿qué línea o líneas pueden omitirse, de modo que aún se conserve un eje de simetría? ¿Puedes omitir uno, dos o tres lados del rectángulo (b) y conservar aún dos ejes de simetría?

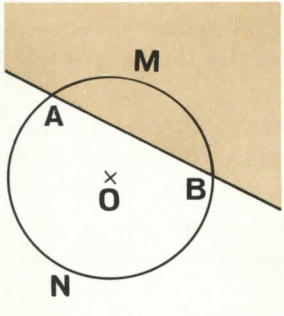
11. Dos segmentos iguales sólo pueden tener un eje de simetría. Diseña su posición más general.

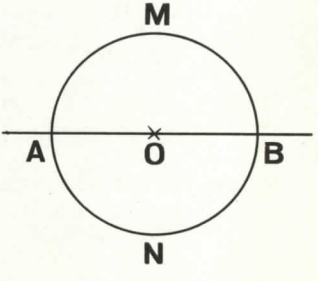
12. ¿Cuáles son los ejes de simetría de un segmento? ¿Cuáles son las posiciones posibles de dos segmentos desiguales con *un eje* de simetría?

21

Isomorfismo de arcos y ángulos centrales en una circunferencia

120. Arcos de circunferencia.—Dibuja una circunferencia, de centro O, y traza una secante AB. Esta secante determina dos semiplanos en cada uno de los cuales, según viste en Primer Curso, está uno de los arcos que tienen por bordes los puntos A y B.





Para distinguir los dos arcos subtendidos por la cuerda AB conviene colocar un punto en cada uno de ellos, por ejemplo M en uno y N en el otro. Los dos arcos se representarán por las notaciones siguientes:

$\overset{\frown}{AMB}$ (se lee: arco AMB)

$\overset{\frown}{ANB}$ (se lee: arco ANB)

Cuando no hay confusión posible, se escribe:

$\overset{\frown}{AB}$ (se lee: arco AB)

Para el estudio que vamos a hacer ahora consideraremos únicamente los arcos que están en el semiplano que no contiene al centro O de la circunferencia.

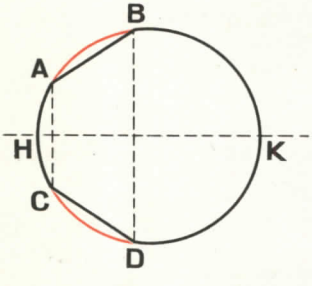
EJEMPLOS. 1.º Si la secante pasa por el centro O de la circunferencia, ¿cuál de los arcos tendrías que considerar?

Observa que doblando por la secante, los dos arcos AMB y ANB coinciden, luego será indiferente utilizar uno u otro.

Se dice que estos dos arcos son iguales, y cada uno de ellos se llama *semicircunferencia.*

2.º Basándote en el ejercicio anterior, establece la **relación de igualdad** entre arcos.

En una misma circunferencia o en circunferencias iguales dos arcos son iguales cuando superpuestos coincidan sus extremos.



La figura representa dos arcos iguales AB y CD; para expresarlo se escribe

$$\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$$

Para conseguir superponer estos arcos basta plegar la figura por el eje de simetría HK.

3.º La coincidencia de los arcos AB y CD de la figura lleva consigo la coincidencia de las cuerdas AB y CD. Luego

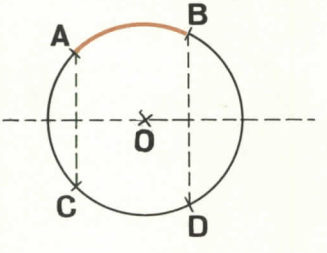
Cuando dos arcos de una misma circunferencia o de circunferencias iguales son iguales las cuerdas que lo subtienden son iguales.

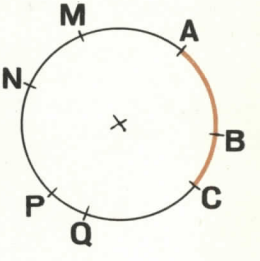
4.º Comprueba que la relación de igualdad de arcos que acabas de establecer tiene las tres propiedades: reflexiva, simétrica y transitiva, o sea, es una relación de equivalencia.

121. Arcos generales.—La relación de igualdad que has establecido te permite, como has visto en otras ocasiones, clasificar todos los arcos de una circunferencia. Cada una de las clases estará formada por arcos iguales todos ellos. A cada clase la llamaremos **arco general.** Cada arco de una clase se dice que es un **representante** de ella, es decir, del arco general a que pertenece. Si $\overset{\frown}{AB}$ es un representante de un arco general, representaremos a éste por $\{\overset{\frown}{AB}\}$.

EJEMPLOS. 1.º El arco AB es representante de un arco general. ¿Cómo obtendrás otro representante del mismo arco general, que tenga uno de sus extremos en el punto C?

Solución: Como ha de ser representante del mismo arco general, el arco que has de obtener tendrá que ser igual al arco AB. Basta entonces que dobles la circunferencia por una recta que pase por su centro, de modo que el punto A caiga en C; el punto D sobre el que caiga B es el otro extremo del arco CD que buscabas.





2.º ¿Sabrías encontrar otro representante distinto del mismo arco que tenga también extremo en C?

Solución: Repite la misma construcción, pero haciendo ahora coincidir B con C; el punto sobre el que caiga A será el otro extremo.

3.º Viste en el curso pasado que dos arcos que están en la posición de los arcos AB y BC de la figura 2.ª se llaman **consecutivos.**

Pues bien, siendo MN y PQ dos representantes de dos arcos generales, halla otros dos representantes de dichos arcos que sean consecutivos.

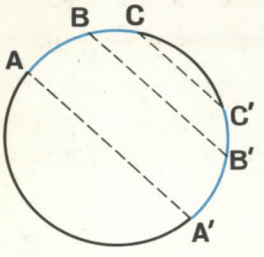
Basta que utilices el mismo método que en los ejercicios anteriores.

122. Adición de arcos generales.—Las operaciones con los arcos presentan muchas analogías con las operaciones sobre segmentos.

Para sumar dos o más arcos, de una misma circunferencia o de circunferencias iguales, se les pone consecutivos, y el arco que tiene por origen el origen del primero y por extremo el extremo del último es un representante de la suma pedida.

Así, $\overset{\frown}{AC}$ es la suma de $\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{BC}$. Evidentemente que:

$$\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{CB}+\overset{\frown}{BA}$$

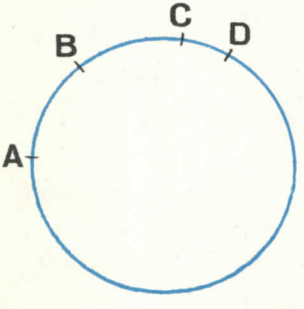


si no se tiene en cuenta el sentido de los arcos. Luego la adición de arcos tiene la *propiedad conmutativa.*

También tiene la *propiedad uniforme.* Pues de

$$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{A'B'}$$
$$\overset{\frown}{CD}=\overset{\frown}{C'D'}$$

sale $$\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{CD}=\overset{\frown}{A'B'}+\overset{\frown}{C'D'}$$



Y la *propiedad asociativa*:

$$(\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{BC})+\overset{\frown}{CD}=\overset{\frown}{AB}+(\overset{\frown}{BC}+\overset{\frown}{CD})$$

la demuestra bien la figura.

Luego el *conjunto de los arcos tiene la estructura de semigrupo aditivo conmutativo.*

En adelante, como has hecho siempre, llamarás simplemente **arco** tanto a los arcos como a los arcos generales. El contexto te dirá cuál de las dos nociones estás utilizando.

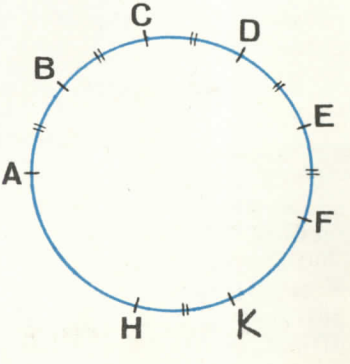
123. Múltiplo de un arco.—Un múltiplo de un arco es una suma de varios arcos iguales a aquel arco.

Así,

$$\overset{\frown}{AF}=5\,\overset{\frown}{HK}$$

y, por consiguiente,

$$\overset{\frown}{HK}=\frac{\overset{\frown}{AF}}{5}$$



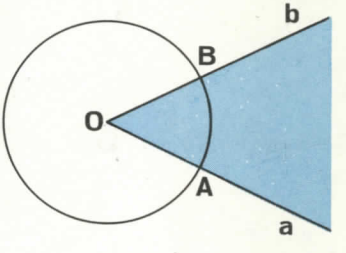
Es decir, cuando un arco es múltiplo de un segundo arco, este arco es un submúltiplo del primero.

Para comparar dos arcos de una misma circunferencia o de circunferencias iguales, se superponen de manera que

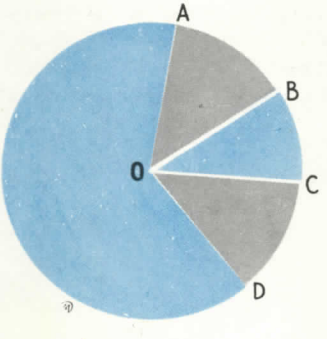
teniendo el mismo centro y un extremo común, caigan del mismo lado.

Así, de los arcos AC y AD se dice que $\overset{\frown}{AD} > \overset{\frown}{AC}$ si partiendo del origen A, se recorre el arco $\overset{\frown}{AD}$ y se encuentra antes el punto C que el D.

124. Angulo central y arco correspondiente.—*Angulo central* es un ángulo cuyo vértice está en el centro de la circunferencia. El arco de circunferencia interior al ángulo central se llama *arco correspondiente* al ángulo.



Dos semirrectas Oa, Ob que salen del centro O de una circunferencia cortan a la circunferencia respectivamente en A y B; aquéllas determinan dos ángulos, y se ha convenido en llamar $\widehat{aOb}$ al ángulo convexo; aquéllas determinan también dos arcos de extremos A y B y se conviene en llamar $\overset{\frown}{AB}$ al que está interceptado por $\widehat{aOb}$.



EJEMPLOS. 1.° Traza un arco AB y, por doblado alrededor de un diámetro, otro arco igual a él, $\overset{\frown}{CD}$.

Tenemos, pues,

$$\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$$

Unamos ahora los puntos C y D con O. Comprobaremos fácilmente por superposición, doblando de nuevo, que

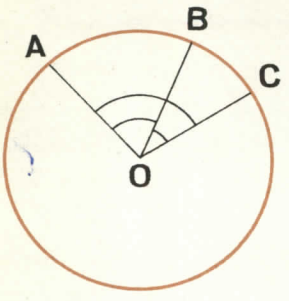
$$\widehat{AOB} = \widehat{COD}$$

A arcos iguales corresponden ángulos centrales iguales.

2.° Demuestra, de modo análogo, el **recíproco** del teorema anterior, o sea

A ángulos centrales iguales corresponden arcos iguales.

125. Isomorfismo entre ángulos y arcos.—¿Qué clase de correspondencia es la definida entre los arcos de una circunferencia y sus ángulos centrales correspondientes?



Es una correspondencia biunívoca, pues, según el teorema anterior, a cada arco general le corresponde un solo ángulo general, y a cada ángulo general un solo arco general.

Además, sean dos ángulos centrales consecutivos $\widehat{AOB}$ y $\widehat{BOC}$, cuyos arcos correspondientes $\overset{\frown}{AB}$ y $\overset{\frown}{BC}$ también son consecutivos. Es evidente que al ángulo $\widehat{AOC}$ suma de los ángulos $\widehat{AOB}$ y $\widehat{BOC}$ corresponde el arco AC suma de los arcos $\overset{\frown}{AB}$ y $\overset{\frown}{BC}$. O sea, a

$$\widehat{AOC} = \widehat{AOB} + \widehat{BOC}$$

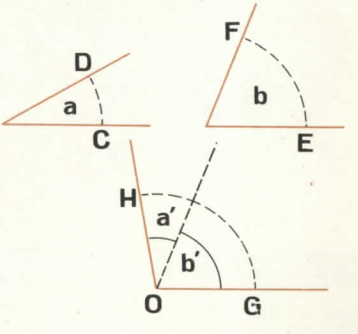
corresponde

$$\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{BC}$$

Entre ángulos centrales y sus arcos correspondientes hay una correspondencia biunívoca, la cual hace corresponder a la suma de los ángulos la suma de sus arcos.

Esa correspondencia biunívoca se llama *isomorfismo* entre el semigrupo de los ángulos y el semigrupo de los arcos.

EJEMPLOS. 1.º Aplica el isomorfismo anterior para hacer la suma de ángulos.



Para *sumar* dos ángulos $\widehat{a}$ y $\widehat{b}$ se les traza un arco correspondiente, con el mismo radio, y haciendo centro en el origen de una semirrecta se traza un arco de igual radio que los correspondientes a $\widehat{a}$ y $\widehat{b}$. Sobre este arco se llevan consecutivamente los de $\widehat{a}$ y $\widehat{b}$, y a la suma de estos arcos corresponde la suma de los ángulos. Así, por ser

$$\overset{\frown}{GH} = \overset{\frown}{CD} + \overset{\frown}{EF}$$

será

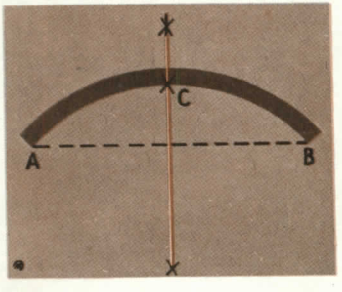
$$\widehat{GOH} = \widehat{a'} + \widehat{b'} = \widehat{a} + \widehat{b}$$

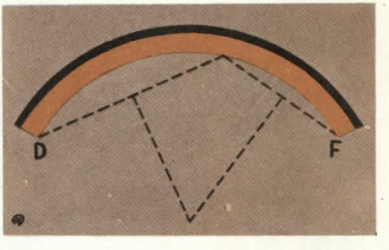
2.º Comprueba que es un isomorfismo la correspondencia entre los conjuntos y sus cardinales correspondientes.

Solución: Para sumar dos clases sumarás un representante de cada una. Haz con papeles un representante A de la clase correspondiente al cardinal 7: será un conjunto de siete papeles. Otro representante B de la clase correspondiente al cardinal 5: constará de cinco papeles. ¿Cuál es el conjunto $A+B$? El formado por los papeles de A y los de B. ¿Cuál es su cardinal? Es 12. Entonces la clase de $A+B$ tiene como cardinal 12. Pero $12=7+5$, luego a la clase suma $A+B$ le corresponde el cardinal suma $7+5$. Es, pues, un isomorfismo.

EJERCICIOS

1. Divide en dos partes iguales un arco dado AB, por medio de la regla y el compás.





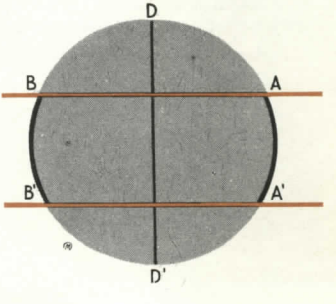
2. Disponiendo de una parte del borde de una rueda, determina el centro de la misma.

3. Por un punto interior a una circunferencia traza una cuerda que sea dividida en dos partes iguales por el punto.

4. Traza una circunferencia que pase por dos puntos dados y tenga un radio dado.

5. Traza una circunferencia que pase por los tres vértices de un triángulo.

6. Traza una circunferencia circunscrita a un triángulo rectángulo. ¿Dónde está el centro?

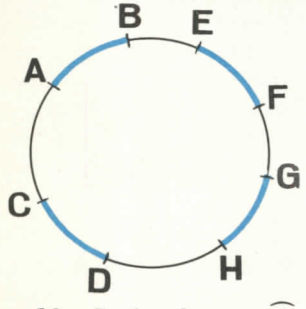


7. En la figura hallar $\widehat{AA'}$, sabiendo que $\widehat{DB'}=120^\circ$ y $\widehat{L}=60^\circ$.

8. Traza dos circunferencias iguales que se corten en A y B y traza su cuerda común. ¿Esta cuerda puede ser diámetro?

9. Traza un segmento AB que mida 4 cm, después las circunferencias de centros respectivos A y B y de 2,5 cm de radio que se cortan en O y O'. ¿Qué decir de la circunferencia de centro O y de radio 2,5 cm? ¿De la circunferencia de centro O' y de radio 2,5 cm?

10. Traza una circunferencia de 4 cm de radio y sitúa un punto A en esta circunferencia. Construye, con la regla y compás, una cuerda de esta circunferencia de extremo A y que mida 6 cm. ¿Cuántas hay?



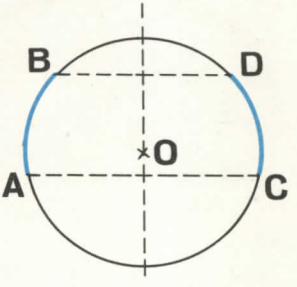
11. Traza un segmento AB que mida 4 cm; traza una circunferencia de 3 cm de radio que tenga a AB como cuerda.

12. En la figura los arcos $\overset{\frown}{AB}$ y $\overset{\frown}{CD}$ son iguales. Traza el eje de simetría por donde debes plegar la figura para hacerlos coincidir. ¿Cómo comprobarás que los arcos $\overset{\frown}{EF}$ y $\overset{\frown}{GH}$ son iguales al $\overset{\frown}{AB}$?

13. Dado el arco $\overset{\frown}{AB}$ construye un arco igual al $\overset{\frown}{AB}$ y que tenga un extremo en el punto C. La figura te indica el procedimiento. Busca otro eje de simetría que te dé otra solución, haciendo coincidir, en el plegado, el punto B con el C.

14. ¿Hay isomorfismo entre los tiempos transcurridos a partir de cierta posición del minutero de un reloj y los ángulos que este minutero va formando con su posición primitiva?

15. ¿Hay isomorfismo entre los conjuntos de objetos y los números cardinales correspondientes?



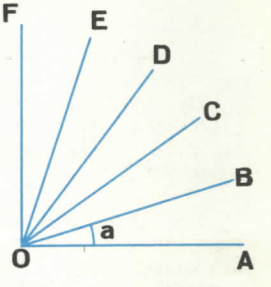
16. Traza una circunferencia de centro O y dos cuerdas AB y AC tales que $\overset{\frown}{BAC}=1$ recto. Comprueba que los puntos B, O y C están en línea recta. ¿Puedes enunciar una propiedad como consecuencia de esta comprobación?

22

Medida de arcos y ángulos

126. Medida de ángulos.—Sumemos 5 ángulos iguales al $\widehat{AOB} = \hat{a}$. El ángulo AOF que así resulta es $5\,\hat{a}$; es un múltiplo de $\hat{a}$.

Si, al contrario, el ángulo $\hat{a}$ lo dividimos en cuatro partes iguales, cada una de dichas partes se denomina $\frac{\hat{a}}{4}$ y es un *submúltiplo o parte alícuota del* $\hat{a}$.

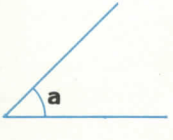


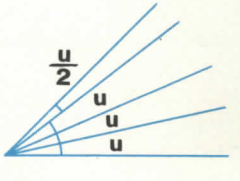
Se dice que la **medida del ángulo** $\widehat{AOB}$ es 5, y la de $\frac{\hat{a}}{4}$ es $\frac{1}{4}$, cuando se toma $\hat{a}$ como unidad.

Dado un ángulo a, elijamos otro ángulo u como unidad. Si $\hat{a}$ es múltiplo de $\hat{u}$, por ejemplo, $\hat{a} = 3\,\hat{u}$, diremos que la medida de $\hat{a}$ es 3. Pero si $\hat{a}$ no es múltiplo de $\hat{u}$, pero sí de una de sus partes alícuotas, por ejemplo,

$$\hat{a} = 3\,\hat{u} + \frac{\hat{u}}{2} = \frac{7}{2}\,\hat{u}$$

diremos que la *medida* de $\hat{a}$ es 7/2

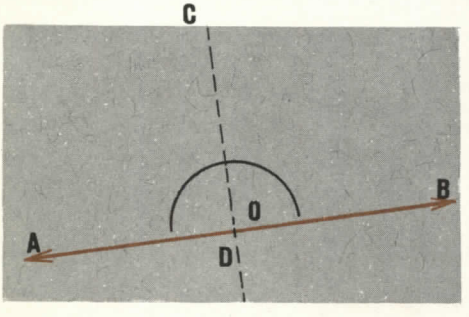




Por tanto, la *medida de una cantidad* es siempre un número que resulta de compararla con los múltiplos y submúltiplos de la unidad. Esta comparación sólo es posible después de definir la *igualdad y la suma* de dichas cantidades, en nuestro caso de ángulos. Si no supiéramos decir cuándo dos ángulos son iguales, ni supiéramos sumarlos, no podríamos medirlos, como no podemos medir las penas, las alegrías, el amor, etc.

La unidad de ángulos es el **ángulo recto,** cuya definición, dada en Primer Curso, vamos a recordar.

127. Angulo recto.—Traza una recta *AB* y toma en ella un punto *O*. Sean *OA* y *OB* las dos semirrectas que así resultan. Dobla la cuartilla transparente de modo que el doblez pase por *O* y *OA* se superponga sobre *OB*. Los ángulos *AOC* y *BOC* tienen dos propiedades:



1.ª **Son adyacentes.**
2.ª **Son iguales.**

Se llaman **ángulos rectos.**

Angulo recto es el que es igual a uno de sus adyacentes.

El ángulo recto es la unidad natural de ángulos. No es necesario conservarla en los Museos u Oficinas de Pesas y Medidas, con todo cuidado para que no se altere. Cualquier niño puede contruirlo con toda exactitud con un sencillo doblez en el momento que se necesite.

Las dos rectas *AB* y *CD* de la figura anterior se dice que son **perpendiculares.**

EJEMPLOS. 1.º ¿Cómo son los ángulos *AOD* y *BOD* de la figura anterior?

2.º Un ángulo llano, ¿cuántos ángulos rectos mide? ¿Y un ángulo completo?

3.º Traza un ángulo que mida 3 ángulos rectos. ¿Es convexo o cóncavo?

4.º Dibuja una recta *a*, y traza un ángulo recto uno de cuyos lados esté en la recta *a*. Hazlo por doblado.

128. Otras unidades angulares empleadas.—Por ser muy grande el *ángulo recto,* se emplean corrientemente como unidades dos submúltiplos suyos. El más antiguo, empleado todavía en Astronomía,

es el *grado sexagesimal,* que resulta de dividir el ángulo recto en 90 partes iguales. Se representa por °. Cada grado sexagesimal se divide en 60 minutos (′) y el minuto en 60 segundo (″). El nombre sexagesimal viene de sesenta. Tiene este sistema el inconveniente de que expresa los ángulos mediante números complejos; así, $36° 54' 18''$. Las operaciones con ellos resultan más incómodas que con los números decimales.

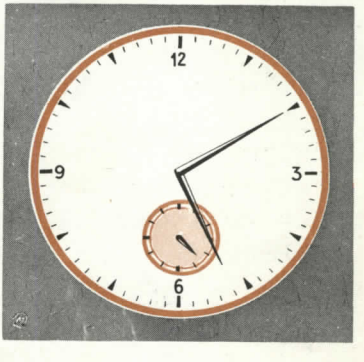
Modernamente se prefiere emplear otro submúltiplo, llamado *grado centesimal,* que resulta de fraccionar el ángulo recto en 100 partes iguales. Se le representa por ^{g}. Cada grado centesimal se divide en 100 minutos (^{m}) y el minuto en 100 segundos (^{s}). De este modo un ángulo de $26^g\,74^m\,82^s$ se puede escribir en forma decimal 26,7482 g.

EJEMPLOS. 1.° *Reduce* 51° *a grados, minutos y segundos centesimales.*

$$\left.\begin{array}{l}\text{Si a } 90° \text{ corresponden } 100^g \\ \text{a } 51° \text{ corresponde } x^g\end{array}\right\} \quad x^g = \frac{100 \cdot 51}{90} = \frac{170}{3} = 56^g\,66^m\,66^s$$

2.° *¿Qué ángulo describe la aguja segundero de un reloj en* 17 *segundos y* $\frac{1}{5}$?

Dicha aguja da una vuelta completa, o sea, 360°, en 60 segundos. Luego en un segundo describe: $360° : 60 = 6°$; y en $17\frac{1}{5}$ segundos: $17\frac{1}{5} \cdot 6° = \frac{86}{5} \cdot 6° = 103° 12'$.



3.° *¿Qué ángulo forman las agujas de un reloj a las* 5 *h* 10 *m?*

El arco comprendido entre dos cifras horarias vale:

$$360 : 12 = 30°$$

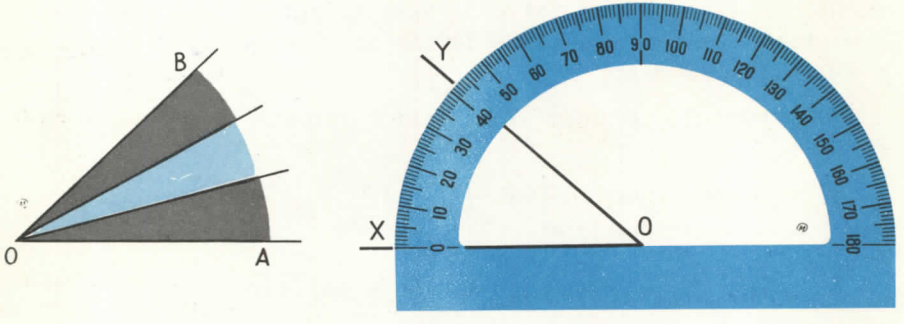
De la cifra 2 a la cifra 5 habrá, pues:

$$30° \cdot 3 = 90°$$

Pero el horario estará por delante de la cifra 5 un ángulo que vale: $30° \cdot \frac{10}{60} = 5°$, ya que en 60 minutos recorre 30°.

Luego el ángulo formado por las dos agujas mide $90° + 5° = 95°$.

129. Medida de arcos y de ángulos.—Una vez definida la igualdad y la suma de arcos, podemos estudiar su medida. Ahora bien, según el número 124, la división de un arco AB en un número cualquiera de partes iguales, produce en su ángulo central correspondiente la división en igual número de partes iguales. Y si tomamos como unidad de arcos el que corresponda a la unidad de ángulos, el mismo número expresará la medida del ángulo y de su arco correspondiente. Así se pueden medir los arcos por sus ángulos centrales correspondientes, y éstos por aquéllos, gracias



al isomorfismo entre ambos. Ahora bien, ya que la igualdad de arcos es mucho más fácil de apreciar a simple vista que la de ángulos, de ahí que para medir éstos se prefiera emplear *limbos circulares*. Es el aparato llamado *transportador de ángulos*.

EJEMPLOS. 1.° Mide con el transportador el ángulo XOY de la figura.

Se coloca el transportador como indica la misma:

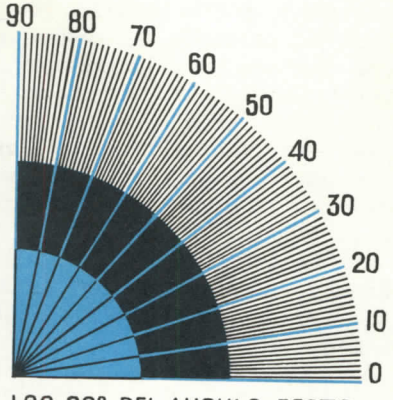
$$\overset{\frown}{XOY} = 42^\circ$$

2.° Si el ángulo AOB mide 57°, ¿cuánto mide su tercera parte? Mide

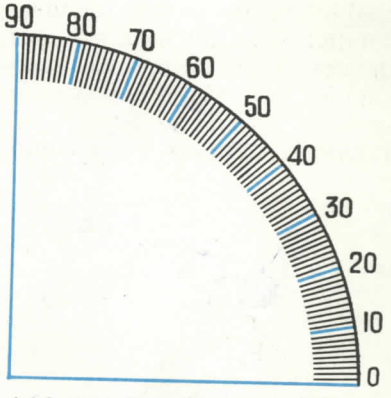
$$\frac{\overset{\frown}{AOB}}{3} = \frac{57^\circ}{3} = 19^\circ$$

130. Unidades de arco empleadas.—La unidad natural de arcos es el *cuadrante*, que es la cuarta parte de la circunferencia y cuyo ángulo central correspondiente es el ángulo recto. El cuadrante se divide del mismo modo que el ángulo recto en 90 ó en 100 partes

iguales, y éstas se toman como unidades de arcos y se designan con el mismo nombre que sus correspondientes ángulos.



LOS 90° DEL ANGULO RECTO



LOS 90° DEL CUADRANTE

El hecho de que se haya dado el mismo nombre a las unidades de ángulos y de arcos nos obliga a poner más cuidado para no confundir estas dos magnitudes o semigrupos.

131. Operaciones con medidas angulares.—Las mismas reglas y principios aplicados a los complejos del Sistema Métrico valen para los complejos de arco o de ángulo, aunque sus unidades no varíen de 10 en 10.

132. Adición.—Se suman separadamente las unidades del mismo orden, empezando por la derecha. Si una suma parcial contiene unidades del orden inmediato superior, se añaden a las de este orden.

Así, en el ejemplo que va adjunto, de 93″ se restan 60″, quedando 33″. Los 60″ son 1′, que se añade a 124′. De 125′ se restan 120′, que hacen 2°, los cuales se añaden a los 14°.

5°	43′	27″
7°	30′	23″
2°	51′	43″
14°	124′	93″
16°	**5′**	**33″**

133. Sustracción.—Se restan separadamente las unidades del mismo orden, empezando por la derecha. Si un sustraendo parcial es mayor que el minuendo correspondiente, se añade a éste una unidad del orden inmediato superior, y para compensar se añade la misma unidad al sustraendo de la sustracción parcial siguiente.

75°	8′	32″
15°	19′	50″
59°	**48′**	**42″**

134. Multiplicación.—Para multiplicar un número complejo por **un número entero,** se multiplica sucesivamente cada una de las partes del número complejo por el multiplicador, empezando por la derecha. Si un producto parcial contiene unidades del orden inmediato superior, se les añade al producto siguiente.

$$\begin{array}{rrr} 3^\circ & 26' & 42'' \\ & & 6 \\ \hline 18^\circ & 156' & 252'' \\ \mathbf{20^\circ} & \mathbf{40'} & \mathbf{12''} \end{array}$$

135. División.—Para dividir un número complejo por **un número entero,** se dividen sucesivamente por el divisor cada una de las partes del dividendo, y se convierte cada resto en unidades del orden inmediatamente inferior para añadirlas a la parte siguiente del dividendo.

Aplicando esta regla, se halla que el cociente de $27^\circ\ 30'\ 36''$ por 6 es $4^\circ\ 35'\ 6''$.

$$\begin{array}{rrr|l} 27^\circ & 30' & 36'' & 6 \\ \hline 3^\circ = 180' & & & 4^\circ\ 35'\ 6'' \\ \hline 210' & & & \\ 30' & & & \\ 0' & 36'' & & \\ & 0'' & & \end{array}$$

EJERCICIOS

1. Convierte en segundos:

$$12^\circ\ 45'\ 38''; \qquad 65^\circ\ 5'\ 35''; \qquad 9^\circ\ \frac{37}{72}; \qquad 78^\circ\ \frac{101}{144}.$$

2. Halla en grados, minutos y segundos, la medida del arco que vale:

$$\frac{1}{8} \text{ de circunferencia}; \qquad \frac{9}{25} \text{ de circunferencia};$$

$$\frac{51}{64} \text{ de circunferencia}.$$

Efectúa las operaciones siguientes:

3. $38^\circ\ 54'\ 23'' + 76^\circ\ 19'\ 56''$.
4. $19^\circ\ 17'\ 56'' - 8^\circ\ 23'\ 45''$.
5. $180^\circ - 83^\circ\ 36'\ 54''$.
6. $27^\circ\ 31'\ 48'' + 30^\circ\ 54'\ 37''$.
7. $81^\circ\ 7'\ 37'' - 2^\circ\ 9'\ 5''$.
8. $16^\circ\ 38'\ 23'' \times 7$.
9. $53^\circ\ 19'\ 27'' : 6$.
10. $90^\circ - 13^\circ\ 47'\ 28''$.
11. $3^\circ\ 9'\ 7'' + 20'$.
12. $9^\circ\ 31' - 3^\circ\ 9''$.
13. $3^\circ - 17^\circ\ 41''$.
14. $3^\circ\ 15'\ 16'' + 12^\circ\ 48'\ 54''$.
15. $29^\circ\ 31'\ 55'' \times \frac{3}{5}$.

16. Una rueda tiene 8 radios. ¿Qué ángulo forman dos radios consecutivos?

17. Dividimos una circunferencia en 12 partes iguales. Halla el ángulo que forman dos radios consecutivos.

18. Halla los grados, minutos y segundos sexagesimales de 1,53 rectos.

19. Reduce 87° a grados, minutos y segundos centesimales.

20. ¿Cuál es el suplemento de $137^g\,78^m\,16^s$?

21. Expresa en grados, minutos y segundos sexagesimales el valor del ángulo complementario de 57^g.

22. ¿Qué ángulo forman las agujas de un reloj a las 10 horas 30 minutos?

23. ¿Qué ángulo forman el horario y el minutero de un reloj a las 4 horas 45 minutos?

24. Dos ángulos son complementarios e iguales. ¿Cuánto vale cada uno de estos ángulos?

25. ¿Cuál es el ángulo de las dos agujas de un reloj a las 4 h? ¿A las 4 h 15 mn? ¿A las 4 h 45 mn? ¿A las 7 h?

26. Dar en grados las medidas de dos ángulos suplementarios uno de los cuales es doble del otro?

27. Dos ángulos complementarios tienen por diferencia un ángulo de 42°. ¿Cuáles son sus medidas?

28. ¿Cómo es el arco correspondiente a un ángulo central de 60° con respecto al correspondiente a un ángulo central de 15°?

29. Una cuerda determina en una circunferencia dos arcos, de los cuales el menor vale $157^\circ\,24'\,16''$. ¿Cuánto mide la mitad del mayor?

30. En una circunferencia se han marcado 4 puntos, A, B, C y D, colocados en este mismo orden. Sabiendo que $\widehat{AB}=56^\circ\,28'\,35''$, $\widehat{BC}=78^\circ\,21'\,43''$ y $\widehat{CD}=104^\circ\,5'\,10''$, halla: 1.º, $\widehat{AC}$; 2.º, $\widehat{AD}$; 3.º, $\widehat{DA}$.

31. Sabiendo que en una circunferencia es $\widehat{AB}=4\,\widehat{CD}$, y que $\widehat{CD}=37^\circ\,45'\,12''$, halla la medida del $\widehat{AB}$.

32. Halla la medida de un ángulo central cuyo arco es: 1.º, los 2/5 de la circunferencia; 2.º, los 3/8; 3.º, los 2/9.

23

Divisibilidad numérica

136. Múltiplos de un número.—Si establecemos una correspondencia entre el conjunto E de los números enteros y el conjunto imagen de éstos que resulta de multiplicarlos por el mismo número entero 7, se tiene:

$$\{\ldots, -A, \ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots, A, \ldots\}$$
$$\{\ldots, (-A)\times 7, \ldots, (-3)\times 7, (-2)\times 7, (-1)\times 7, 0\times 7,$$
$$1\times 7, 2\times 7, 3\times 7, 4\times 7, \ldots, A\times 7, \ldots\}$$

El conjunto imagen de esta correspondencia podemos expresarlo también por

$$\{\ldots, -28, -21, -14, -7, 0, 7, 14, 21, 28, \ldots\} \qquad (1)$$

A todos los elementos de este conjunto imagen se les llama *múltiplos de 7.*

DEFINICIÓN: *Múltiplo de un número entero es todo producto de este número por un número entero cualquiera.*

Luego la serie de los múltiplos de un número entero es ilimitada. Y este número entero se llama *divisor y factor* de todos sus múltiplos. Así, el 7 es divisor y factor de todos los números del conjunto imagen (1).

EJEMPLOS. 1.° Escribe 10 múltiplos de 5.

Por ejemplo: 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55.

2.° ¿El número 756 es múltiplo de 4? Sí, porque $756:4=189$.

137. ¿Cómo hallar divisores de números sencillos?—Es evidente que todo número (distinto de 1) admite por lo menos dos divisores: él mismo y la unidad.

EJEMPLOS. 1.° 30 es divisible por 30 y por 1.

El número 0 es divisible por todo número entero (no nulo), y el cociente es siempre 0.

2.°

$$\frac{0}{4}=0$$

El número 1 sólo es divisible por sí mismo.

El mayor divisor de un número es el mismo número.

De aquí resulta que los divisores de un número son un número limitado.

3.° Los divisores de 12 son:

1, 2, 3, 4, 6 y 12.

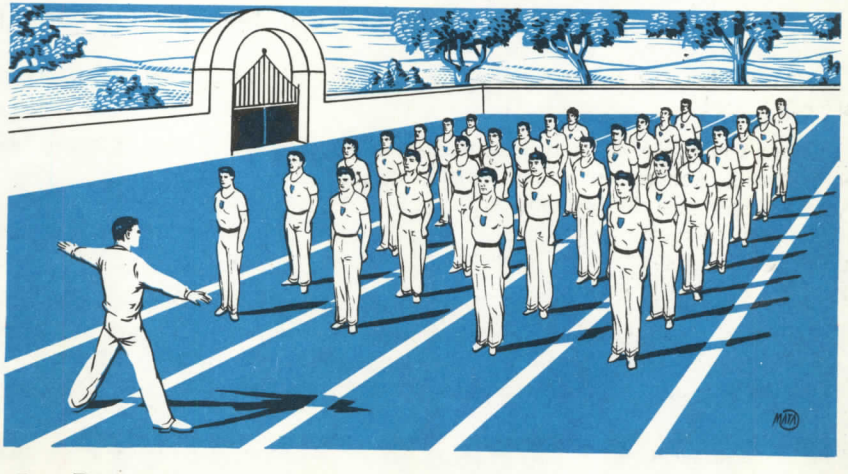
En fin, una igualdad tal como

$$20=5\times 4$$

hace conocer *dos divisores* de 20 que son 5 y 4. Por consiguiente, *ensayando encontrar divisiones exactas, es decir, sin resto, es como se obtendrán los divisores de un número.*

4.° ¿Pueden formar los 28 alumnos de una clase en columna de a 4 para hacer la gimnasia?

Contestaremos afirmativamente, pues la división 28:4 es exacta.



5.° *Divisores de* 36. Ya conocemos 1 y 36:
Pero 36 es divisible por 2 y se tiene:

$$36=2\times 18$$

lo cual nos da los divisores 2 y 18.

36 es divisble por 3 y se tiene:

$$36 = 3 \times 12$$

lo cual nos da los divisores 3 y 12.

36 es divisible por 4 y se tiene:

$$36 = 4 \times 9$$

lo cual nos da los divisores 4 y 9.

36 no es divisible por 5 pero lo es por 6 y se tiene:

$$36 = 6 \times 6.$$

Es inútil continuar los ensayos porque al ir aumentando los divisores, van disminuyendo los cocientes y volvemos a encontrar, en sentido inverso, los pares precedentemente hallados.

Los divisores de 36 son, por consiguiente:

1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36.

6.° *Divisores de* 143. Como este número no es par, no admite ningún divisor par, porque si existiera uno de éstos, dividiendo 2 a este divisor dividiría a 143, lo cual es imposible.

Se comprueba que 143 no es divisible por 3, ni por 5, ni por 7, ni por 9. Lo es por 11 y se tiene

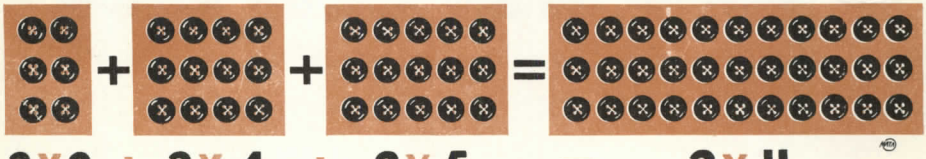
$$143 = 11 \times 13.$$

El divisor que hay que ensayar ahora es 13 y se obtiene por cociente 11. Luego es inútil continuar.

Los divisores de 143 son:

1, 11, 13, 143.

138. Propiedades de los divisores.—Juntando varios cartones que tienen 3 filas de botones podemos formar un cartón único también con 3 filas de botones. O sea, el 3, que divide al $6 = 3 \times 2$, al $12 = 3 \times 4$ y al $15 = 3 \times 5$, divide a su suma $33 = 3 \times 11 = 3 \cdot (2 + 4 + 5)$.



I. Todo número que es divisor de otros varios, lo es de su suma.

Del mismo modo se demuestra que

II. Todo número que es divisor de otros dos, lo es de su diferencia.

Análogamente:

III. Todo número que es divisor de otro, lo es de los múltiplos de éste.

Así, 3, que divide a 15, divide también a $15 \times 4 = 60$.

En efecto, $15 \times 4 = 15 + 15 + 15 + 15$; y como 3 divide a cada uno de los sumandos, tiene que dividir a la suma 60 ó 15×4.

139. Carácter o criterio de divisibilidad.—Es una regla que permite reconocer, sin efectuar la división, si un número es o no divisible por otro número dado.

Así, ¿será divisible 480 por 10? Sabemos que

$$480 : 10 = 48$$

Basta suprimir el último cero.

Todo número que acabe en un cero es divisible por 10.

Del mismo modo se demuestar que:

Todo número es múltiplo de 100 cuando acaba por lo menos en dos ceros, de 1000 cuando acaba por lo menos en tres ceros, etc.

Veamos si, basándonos en las propiedades anteriores, podemos obtener otros criterios de divisibilidad.

140. Divisibilidad por 2 y por 5.—Tenemos 286 botones. ¿Será este número divisible por 2 ó por 5?

Los 28 cartones, de 10 botones cada uno, más el de 6 botones, contienen en total

$$28 \cdot 10 + 6 = 280 + 6 = 286 \text{ botones}$$

Del mismo modo, cualquier número puede descomponerse en una suma de dos términos, uno de los cuales es múltiplo de 10, y el otro la cifra de sus unidades. Pero 2 y 5, que dividen a 10, dividen también a su múltiplo 280. Se puede, pues, escribir:

$$286 = \dot{2} + 6 \qquad \text{y} \qquad 286 = \dot{5} + 6$$

El 2 divide a los dos sumandos de 286, luego divide a este número. En cambio, 5 divide a uno de los sumandos, pero no al otro. Luego no divide a 286.

Un número es divisible por 2 cuando termina en cero o en cifra par.
Un número es divisible por 5 cuando termina en cero o en 5.

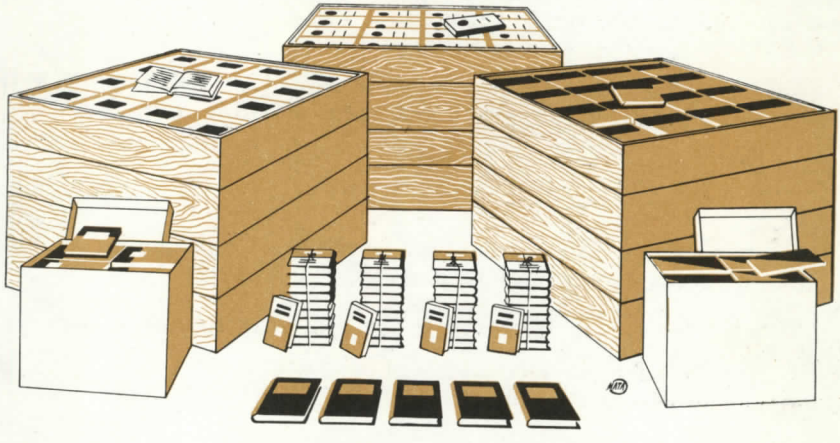
141. Divisibilidad por 4 y por 25.—Todo número, 4936 por ejemplo, puede descomponerse en una suma de dos términos ($49 \times 100 + 36$), uno de los cuales es múltiplo de 100 y el otro el número formado por sus dos últimas cifras de la derecha. Pero 4 y 25, que dividen a 100, dividen también a sus múltiplos. Luego:

$$4936 = \dot{4} + 36 \qquad \text{y} \qquad 4936 = \dot{25} + 36$$

Por tanto:

Para que un número sea divisible por 4 o por 25 es necesario y suficiente que el número formado por las dos últimas cifras de la derecha sea divisible por 4 o por 25, o se componga de dos ceros.

142. Divisibilidad por 9 y por 3.—Si queremos, por ejemplo, repartir 3245 libros entre 9 librerías, suponiendo que están colo-



cados en 3 cajones de mil, 2 cajas de cien, 4 paquetes de diez y 5 libros sueltos, procederemos así: saquemos un libro de cada cajón, o sea, en total 3 libros; saquemos un libro de cada caja, o sea, 2 libros; y, por último, saquemos un libro de cada paquete, o sea, 4 libros, y juntémoslos todos con los libros sueltos.

De este modo, el total de libros sueltos es $3+2+4+5$, o sea, la suma de las cifras de 3245. Por otra parte, en cada cajón han quedado 999 libros, en cada caja 99 libros y en cada paquete 9 libros, números que son todos múltiplos de 9, y pueden, por tanto, distribuirse entre las 9 librerías. Resulta, por consiguiente, que el número total será divisible si lo es la suma de las cifras

$$3+2+4+5=14.$$

Para que un número sea divisible por 9 es necesario y suficiente que la suma de sus cifras sea divisible por 9.

NOTA.—Para calcular rápidamente el resto:

1.° No se tiene en cuenta las cifras 9.

2.° Se desprecia toda suma parcial igual a 9.

3.° Desde que una suma parcial pasa de 9, se la reemplaza por la suma de sus cifras.

EJEMPLO.—Calcular el resto de la división de 7963531 por 9. Se dirá 7 y 5, 12; 3 y 3, 6; 6 y 1, 7. El resto es 7.

La igualdad $3245 = \dot{9} + 14$, que se acaba de establecer, se convierte en $3245 = \dot{3} + 14$, ya que, siendo 3 divisor de 9, todo múltiplo de 9 es un múltiplo de 3. Luego:

Para que un número sea divisible por 3 es necesario y suficiente que la suma de sus cifras sea divisible por 3.

CALCULO MENTAL

- *Di* cuántos múltiplos tiene un número. ¿Cómo hallarías todos los múltiplos de un número dado?
- *Di*, sin efectuar la división, si los números siguientes son divisibles por 3, 4, 5 y 9:

  204, 171, 153, 315, 341, 730, 2211, 1009, 8712, 10967

- *Halla*, sin efectuar la división, el resto de dividir por 9 los siguientes números:

  218, 3407, 276381, 4327065, 123456.

  Observa que el resto de la división es el mismo que el de la suma de las cifras.

- *Halla* los restos que se obtienen al dividir 78927 por 2, 3, 4, 5, 8 y 9.
- *Forma* los 8 primeros múltiplos de 15, de 20, de 24, de 50.
- *Di* los múltiplos de 20 comprendidos entre 100 y 200, los de 30 comprendidos entre 300 y 400.
- *Calcula*, sin hacer la división, el resto de dividir:

  74 por 10; 872 por 100; 1675 por 100; 8541 por 100

● *Escoge* alguna de las respuestas, razonando la elección:

8	es múltiplo,	divisor	de 128
42	"	"	14
36	"	"	216
15	"	"	120
48	"	"	6
180	"	"	60

EJERCICIOS

1. Un número termina por 50. ¿Es divisible por 5?; ¿por 25?

2. ¿Cuáles son los números escritos únicamente con la cifra 3 que son divisibles por 9?

3. La misma pregunta para los números escritos únicamente con la cifra 6.

4. ¿Cuáles son los números que, divididos por 5, dan 2 por resto?

5. ¿Cuál es el menor número que debe añadirse a 803642 para obtener un múltiplo de 9?

6. ¿Por qué cifra se debe reemplazar x en los números siguientes para que cumplan las condiciones indicadas?

1.º $37\,x\,2=\dot{4}$;

2.º $65\,x\,8=\dot{6}$;

3.º $9\,x\,63=\dot{9}$;

4.º $92\,x\,5=\dot{9}$;

5.º $41\,x\,7=\dot{3}$;

6.º $7\,x\,4=\dot{4}$ y $\dot{3}$.

7. ¿Qué cifra hay que escribir a derecha de 23 para obtener un número de tres cifras divisible: a) por 3; b) por 4; c) por 5; d) por 9?

8. ¿Qué cifra se puede escribir a la izquierda de 378 para obtener un número de cuatro cifras divisible: a) por 3; b) por 9?

9. ¿Cuál es el número más pequeño que hay que añadir a 24815 para que sea divisible por 9?

10. ¿Pueden colocarse 1468 patos en jaulas, entrando 9 en cada jaula sin sobrar ninguno? ¿Y entrando 4 en cada jaula?

11. ¿Se pueden transportar 1048 conejos en cajas, de modo que vayan 8 conejos en cada caja y vayan completas? Contestar sin hacer la división. ¿Y si fueran 3027 conejos?

12. ¿Pueden formar en filas de a 4, sin que sobre ninguno, 270 alumnos?

13. ¿Pueden pagarse 36700 pesetas empleando únicamente billetes de 50 pesetas?

14. Demuestra que el producto de dos números consecutivos es múltiplo de 2.

15. Demuestra que el producto de tres números consecutivos es múltiplo de 3.

16. ¿Qué cifras pueden escribirse a la derecha de 18 para obtener un número de tres cifras divisibles por 4?

17. ¿Qué cifra hay que añadir a la derecha de 187 para obtener un número de cuatro cifras que sea divisible por 9?

18. ¿Qué cifras pueden añadirse a la derecha de 91 para obtener un número de tres cifras que sea divisible por 6?

19. ¿Qué cifras se pueden colocar a la izquierda de 25 para obtener un número de tres cifras que sea divisible por 3?

20. ¿Qué cifras pueden añadirse a la derecha de 531 para obtener un número de cuatro cifras que sea múltiplo de 9; de 5?

21. ¿Qué cifra se puede escribir a la derecha del número 12 para que resulte un número de tres cifras divisible: a) por 3; b) por 4; c) por 5.

22. Sábese que son bisiestos todos los años que son múltiplos de 4, a excepción de los terminados en dos ceros, cuyas centenas no son múltiplos de 4. Según esto, ¿son bisiestos los años siguientes: 1964, 1978, 2000, 2400, 2095, 2958?

23. Entre las matrículas de los coches siguientes:

SS 9518.	B 30512.	M 154212.
CD 436.	V 25616.	V 16534.
M 46508.	BI 20838.	B 52910.

¿cuáles son divisibles por 4?; ¿cuáles por 3?

24

Números primos y compuestos

143. Números primos.—¿Cuáles son los divisores de 5?, ¿de 11?, ¿de 13?

Solución: De las igualdades

$$5 = 5 \times 1; \qquad 5 = (-5) \times (-1)$$
$$11 = 11 \times 1; \qquad 11 = (-11) \times (-1)$$
$$13 = 13 \times 1; \qquad 13 = (-13) \times (-1)$$

se deduce que 5 y (-5), 1 y (-1) dividen a 5
que 11 y (-11), 1 y (-1) dividen a 11
que 13 y (-13), 1 y (-1) dividen a 13

Se comprueba que estos números *sólo* tienen dos divisores: ellos mismos y la unidad (y los opuestos de éstos). Se dice que estos números, 5, 11, 13 son *primos.*

DEFINICIÓN.—Se llama "número primo" todo número entero que no tiene otros divisores que él mismo y la unidad (y sus opuestos).

EJEMPLO.—Sea el número 7; no puede admitir ningún divisor par porque él es impar. No es divisible por 3 ni por 5. Luego el número 7 sólo es divisible por 7 y por 1 (y por los opuestos de estos dos).

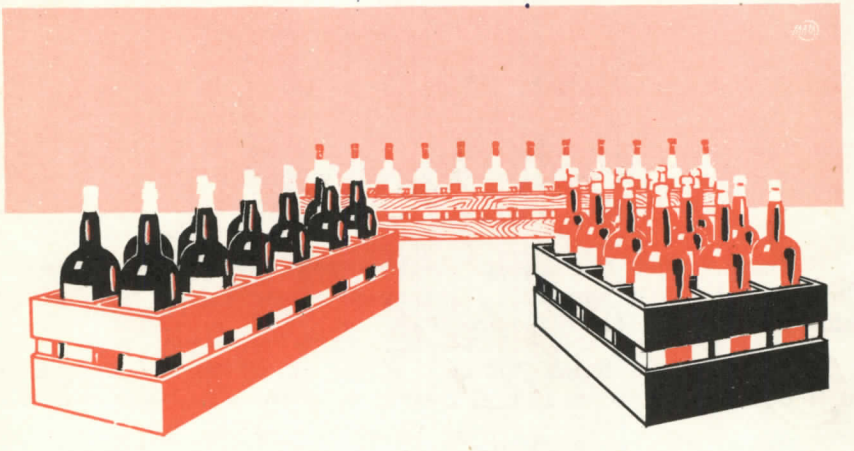
Es *primo.*

144. Números no primos o números compuestos.—Un número que no es primo admite por lo menos 3 divisores: él mismo, el número 1 y otro divisor. Por ejemplo 4 no es primo: sus divisores son 1, 2 y 4. Un número a que no es primo tiene, por consiguiente, divisores más pequeños que él. El menor b de estos divisores, diferentes de 1, es un número primo, porque si no lo fuera él mismo tendría un divisor c que sería también divisor de a y entonces b no sería el menor divisor de a. Luego:

Todo número no primo admite por lo menos un divisor primo distinto de la unidad.

EJEMPLOS. 1.º El menor divisor de 12 (distinto de 1) es 2. El número 2 es primo.

2.º Si un conjunto tiene de cardinal un número compuesto, sus elementos se pueden colocar en filas con el mismo número de elementos en cada fila. Por eso, generalmente, en el comercio y en la vida diaria se prefiere el empleo de los números compuestos por la mayor facilidad del embalaje y presentación de las mercancías. Así, 12 botellas pueden colocarse en una fila de 12; en dos filas de 6 ó en tres filas de 4, que es como corrientemente se expenden.



145. Una tabla de números primos: la criba de Eratóstenes.— Sería interesante saber cuántos números primos hay. Desde antiguo se demostró que no hay un número limitado de ellos, o sea, dado un número primo, por grande que sea, existe siempre otro mayor. Por tanto, *la serie de números primos es ilimitada.* El matemático griego Eratóstenes, 200 años antes de Jesucristo, se propuso hallar la tabla de los números primos inferiores a 100. Para ello grabó en una tabla los números de 1 a 100. Tachó en seguida todos los números pares, excepto el 2, que es primo, agujereando los lugares de los mismos. El primer número no tachado es 3, que es también primo. Suprimió entonces todos los múltiplos de 3 que aún quedaban, o sea, contando a partir de 9 de tres en tres lugares. Quitó luego todos los múltiplos de 5, contando a par-

tir de él de cinco en cinco lugares. Notó que, en realidad, bastaba empezar a contar a partir de 25, cuadrado de 5, pues los múltiplos anteriores de 5, o sea, 2·5, 3·5 y 4·5 habían sido ya quitados.

Finalmente, agujereó los lugares correspondientes a los múltiplos de 7, contando de siete en siete lugares, a partir de 49. Los múltiplos de 4, 6, 8, 9 y 10 quedaron suprimidos al quitar los de 2, 3 y 5. Igualmente quedaron suprimidos los múltiplos de 11 inferiores al $11 \cdot 11 = 121$, y como éste es mayor que 100, en la tabla no quedó ningún múltiplo de 11, ni tampoco de ningún otro número mayor que 11, por la misma razón. Todos los números que quedaban eran primos. Esta es la célebre *criba de Eratóstenes,* pues al agujerear los lugares correspondientes a los números no primos, la tabla quedó convertiva en una auténtica criba.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

146. Cómo conocer si un número dado es primo.—Para ello basta dividirlo por los divisores primos 2, 3, 5, ... Se puede concluir que *el número dado es primo cuando, sin haber obtenido división exacta, se llega a un cociente igual o menor que el divisor.*

Así, para reconocer si 107 es primo, se le divide por los divisores 2, 3, 5 y 7 sin obtener cociente exacto. Al dividir por 11 se obtiene el cociente entero 9, que es menor que el divisor 11. Puede concluirse que 107 es primo, ya que con cualquier divisor mayor que 11, el cociente será menor que 9, y todos los números menores que 9 han sido ya probados.

147. Descomposición de un número en factores primos.—Descomponer un número en factores primos es hallar un producto de divisores primos que sea igual a dicho número.

EJEMPLO.—Sea descomponer 260 en factores primos.

Se tiene:

OPERACIONES		DISPOSICION PRACTICA	
$360:2=180;$	$360=2\times180$	360	2
$180:2=90;$	$360=2^2\times90$	180	2
		90	2
$90:2=45;$	$360=2^3\times45$	45	3
$45:3=15;$	$360=2^3\times3\times15$	15	3
		5	5
$15:3=5;$	$360=2^3\times3^2\times5$	1	

$$360=2^3\times3^2\times5$$

Para descomponer un número en sus factores primos se aplica la siguiente regla:

1.° Se divide el número por su menor divisor primo diferente de 1.

2.° Se hace lo mismo con el cociente hallado, y con los siguientes hasta llegar al cociente 1.

3.° El número dado es igual al producto de los divisores empleados.

148. Condición de divisibilidad de un número por otro.—Si dos números están descompuestos en sus factores primos, es fácil ver si uno de ellos es divisible por el otro.

Sean:

$$4680=2^3\cdot3^2\cdot5\cdot13$$
$$117=3^2\cdot13$$

En el primero existen todos los factores primos del segundo con igual exponente; separémosles y tendremos:

$$4680=(3^2\cdot13)\times(2^3\cdot5)=117\times40$$

Esta igualdad nos indica que 4680 es divisible por 117 y que el cociente es 40.

La condición necesaria y suficiente para que un número sea divisible por otro es que el primero contenga todos los factores primos del segundo con exponentes iguales o mayores.

Cumplida esta condición, se obtiene el cociente suprimiendo en el dividendo los factores del divisor.

Que la anterior condición es necesaria quiere decir que si no se cumple no es un número divisible por el otro; y que es suficiente quiere decir que basta con que se cumpla para que lo sea.

149. Máximo común divisor (m. c. d.).—Sean los números 30 y 45.

Los divisores de 30 son: **1**, 2, **3**, **5**, 6, 10, **15**, 30.

Los divisores de 45 son: **1**, **3**, **5**, 9, **15**, 45.

Los divisores en negrita son los divisores comunes de 30 y 45. El mayor de estos divisores comunes es 15 y se llama *máximo común divisor* (m. c. d.).

Máximo común divisor de varios números es el mayor número que es divisor de todos ellos.

150. Hallar el m. c. d.—Se aplica la regla siguiente:

1.° Se descomponen los números en factores primos.

2.° Se forma el producto de los factores primos comunes, afectado cada uno de ellos con el menor exponente con que aparece en los números dados.

En virtud del número 148, puede asegurarse que el número así hallado será divisor de todos los números dados, y será el mayor posible.

EJEMPLOS. 1.° Sea hallar el m. c. d. de los números 360 y 420. Se tiene:

$$360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5\,; \qquad 420 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$$

Los factores comunes son 2, 3 y 5. El menor exponente de 2 es 2; el de los otros factores es 1. El m. c. d. será $2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$, y se indica así:

$$\text{m. c. d. } (360,\ 420) = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$$

2.° Hallar el m. c. d. de 126, 396 y 1080. Se tiene:

$$126 = 2 \cdot 3^2 \cdot 7\,; \qquad 396 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 11\,; \qquad 1080 = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5$$

Los factores comunes son 2 y 3. El menor exponente de 2 es 1; el de 3 es 2. Luego:

$$\text{m. c. d. } (126,\ 396,\ 1080) = 2 \cdot 3^2 = 18$$

151. Números primos entre sí.—Dos o más números son primos entre sí cuando no tienen más divisor común que la unidad.

EJEMPLOS: 10 y 13; 15 y 17; 16, 21 y 55. Se debe observar que no es necesario que cada uno de los números sea primo, como sucede en el último ejemplo, pues ni 16, ni 21, ni 55 son primos, pero sí lo son entre sí.

Se reconoce que un divisor común de dos números es su m. c. d. cuando los cocientes obtenidos al dividirlos por este común divisor son primos entre sí.

Así, el m. c. d. de 21 y 35 es 7, porque al dividir 21 y 35 por 7 se obtienen los cocientes 3 y 5, que son primos entre sí.

152. Mínimo común múltiplo. (m. c. m.).—Sean los números 10 y 15.

Los múltiplos de 10 son: 10, 20, **30**, 40, 50, **60**, ...

Los múltiplos de 15 son: 15, **30**, 45, **60**, 75, ...

Los números en negrita son múltiplos comunes de 10 y 15. El menor de los múltiplos comunes es 30, y se le denomina *mínimo común múltiplo* (m. c. m.).

Mínimo común múltiplo de varios números es el menor número que contiene a cada uno de éstos como divisor.

153. Hallar el mínimo común múltiplo.—Se aplica la regla siguiente, cuya demostración se basa en el número 148:

1.° Se descomponen los números en factores primos.

2.° Se forma el producto de todos los factores primos, comunes o no, afectado cada uno de ellos con su mayor exponente.

EJEMPLOS. 1.° *Hallar el m. c. m. de* 18, 28 *y* 108.

Se tiene:

$$18 = 2 \cdot 3^2; \qquad 28 = 2^2 \cdot 7; \qquad 108 = 2^2 \cdot 3^3$$

$$\text{m. c. m. } (18, 28, 108) = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 7 = \mathbf{756}$$

2.° *Hallar el menor número que dividido por* 5, 6 *y* 8 *dé siempre de resto* 3.

El número pedido disminuido en 3 unidades será un múltiplo de 5, de 6 y de 8, y como ha de ser el menor posible, será su m. c. m.

$$\text{m. c. m. } (5, 6, 8) = 5 \cdot 3 \cdot 2^3 = 120$$

El número pedido es $120 + 3 = \mathbf{123}$.

3.º *¿Cuál es la capacidad del tonel más pequeño que se puede llenar exactamente con botellas de 0,8 litros, 1 l, 1,5 l y 2,4 l? Indica el número de botellas de cada clase que contiene.*

La capacidad del tonel ha de ser un múltiplo de 8 dl,, 10 dl, 15 dl y 24 dl, y además el menor posible. Luego es su m. c. m.

$$\text{m. c. m. } (8, 10, 15, 24) = 2^3 \cdot 5 \cdot 3 = 120 \text{ dl}$$

Resp.: **12 litros**

Contendrá: 120 : 8 = **15 botellas** de la 1.ª clase
120 : 10 = **12** " de la 2.ª clase
120 : 15 = **8** " de la 3.ª clase
120 : 24 = **5** " de la 4.ª clase

CALCULO MENTAL

- *Haz* la descomposición en factores primos de: 25, 10, 12, 30, 50, 64, 80.
- *Halla* el m. c. d. de: 10 y 30; 8 y 20; 12 y 64; 15 y 27; 36 y 48.
- *Halla* el m. c. m. de: 5 y 8; 9 y 15; 12 y 20; 30 y 36.
- *Di* cuál es el número primo más pequeño. ¿Hay alguno que sea el mayor de todos?

- *Di* algún número que sea primo.
- *Calcula* mentalmente los cocientes:

$(2^3 \cdot 3^4 \cdot 5^2) : (2 \cdot 3^3 \cdot 5)$; $(3^2 \cdot 7^2 \cdot 11) : (3 \cdot 7 \cdot 11)$;
$(3^3 \cdot 5 \cdot 7^2) : (3 \cdot 5 \cdot 7)$; $(2^5 \cdot 5^3 \cdot 7^2) : (2^3 \cdot 5^2 \cdot 7)$

- *Eleva* al cuadrado los números:

$2^3 \cdot 5^2 \cdot 7$; $3^4 \cdot 5^3 \cdot 11$; $2^3 \cdot 3^4 \cdot 5^3$

- *Halla* la raíz cuadrada de los números:

$2^4 \cdot 3^2$; $3^6 \cdot 5^4$; $2^8 \cdot 5^2 : 7^3$; $3^4 \cdot 5^6 \cdot 7^2$

EJERCICIOS

Haz la descomposición en factores primos de:

1. 45.	**6.** 176.	**11.** 450.	**16.** 7128.
2. 48.	**7.** 198.	**12.** 540.	**17.** 5320.
3. 62.	**8.** 252.	**13.** 210.	**18.** 3440.
4. 96.	**9.** 420.	**14.** 840.	**19.** 1430.
5. 120.	**10.** 504.	**15.** 770.	**20.** 2840.

Hallar el m. c. d. y el m. c. m. de:

21. 89 y 74.	**28.** 315 y 140.	**35.** 45, 252 y 175.
22. 504 y 108.	**29.** 1260 y 75.	**36.** 60, 71 y 90.
23. 6120 y 378.	**30.** 900 y 420.	**37.** 70, 130 y 190.
24. 450 y 360.	**31.** 345 y 180.	**38.** 15, 24 y 44.
25. 980 y 616.	**32.** 630 y 54.	**39.** 506, 750 y 170.
26. 270 y 120.	**33.** 4300 y 720.	**40.** 72, 135 y 216.
27. 720 y 600.	**34.** 2080 y 930.	

41. Halla el m. c. d. de:

a) 1380 y 2790.
b) 3444 y 2268.
c) 5544 y 6552.
d) 504, 5292 y 1520.
e) 1404, 2340 y 3094.

42. Halla el m. c. m. de:

a) 1575 y 1656.
b) 3416 y 3660.
c) 6576 y 7568.
d) 8496 y 38232.
e) 148, 1850 y 2664.
f) 324, 1080 y 2268.
g) 525, 1014 y 1820.
h) 3024, 4752 y 7488.

43. Halla los primeros múltiplos comunes de 40 y 54.

44. ¿Qué múltiplos comunes de 15 y 16 hay entre 300 y 600?

45. ¿Qué múltiplos de 90 y 120 hay entre 400 y 800?

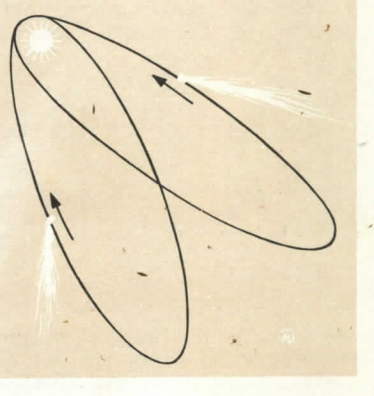
46. Halla todos los números de tres cifras que son múltiplos comunes de 84 y 36.

47. Los soldados de un cuartel no pasan de 500 y pueden formar en grupos de 16, 20 y 25, sin que sobre ni falte ninguno. ¿Cuántos son?

48. Los libros de una biblioteca no pasan de 10000 y se pueden empaquetar por docenas, de 27 en 27 y de 49 en 49, sin que sobre ni falte ninguno. ¿Cuántos son?

49. ¿Cuál es el volumen del mayor trozo cúbico que cabe exactamente en dos cajas de 276 y 345 dm^3 de capacidad? ¿Cuántas veces cabrá en cada caja?

50. Un motociclista tarda en recorrer una pista circular 108 segundos y otro 120 segundos. Si los dos salen al mismo tiempo de la meta, ¿cuándo volverán a coincidir en la misma? ¿Cuántas vueltas habrá dado cada uno?



51. ¿Por cuánto habrá que multiplicar $2^3 \cdot 5^3$ para que el producto sea la unidad seguida de seis ceros?

52. ¿Por cuánto multiplicaremos $2^4\,7^2$ para que el producto sea 14^5?

53. Halla la cabida de un tonel sabiendo que es la menor posible que se puede llenar exactamente con botellas de 60 cl, 90 cl, 1 litro y 2 litros.

54. Dos cañones disparan cada 3 minutos uno y cada 5 minutos otro. Comienzan los dos al mismo tiempo. ¿Al cabo de cuánto tiempo dispararán juntos y cuántos cañonazos habrán disparado para entonces cada uno?

55. Dos cometas se aproximan al Sol, uno cada 25 años y otro cada 60 años. Habiéndose aproximado juntos al Sol en 1950, di la fecha más cercana en que volverán a hacerlo juntos

55. Una campana tañe cada 12 minutos y otra cada 15 minutos. Habiendo sonado juntas a las 12, ¿a qué hora sonarán juntas de nuevo?

57. Juan va a visitar a su abuela cada cinco días, y su primo Enrique cada siete días. ¿Cada cuántos días coinciden allí?

58. En una carretera hay mojones que señalan los hectómetros y postes de la red eléctrica cada 36 metros. Si en un punto coinciden ambos, ¿a qué distancia coinciden de nuevo?

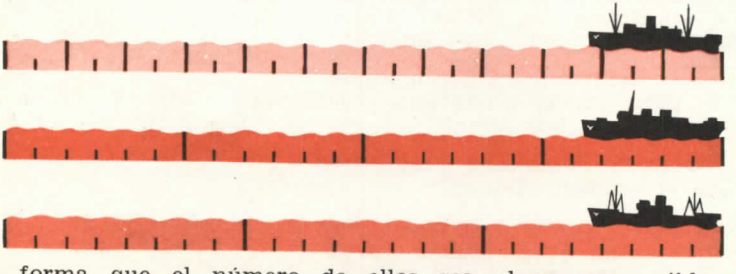
59. Un pasillo de 860 cm de largo y 240 cm de ancho se ha embaldosado con baldosas cuadradas, de la mayor dimensión posible, para caber un número entero de veces en cada lado. ¿Cuál es esta dimensión y cuántas baldosas se emplearon?

60. Tres barcos salen de un puerto: el primero cada dos días, el segundo cada seis días y el tercero cada ocho días. Si salieron juntos el 1 de mayo, ¿qué día volvieron a salir juntos por primera vez?

61. ¿De cuántas maneras se pueden colocar en rectángulo de varias filas 24 árboles?, ¿y 30 árboles?, ¿y 42 árboles?

62. ¿Se pueden disponer en rectángulo 97 objetos?, ¿y 415 objetos?

63. Se tienen dos aljibes con 216 litros y 360 litros de vino, respectivamente. Se quiere trasvasar dicho vino a pequeños recipientes igua-



les, de forma que el número de ellos sea el menor posible y que contengan el vino, sin mezclar el de los aljibes. ¿Qué cantidad tendrá cada recipiente? ¿Cuántos se emplearán para cada aljibe?

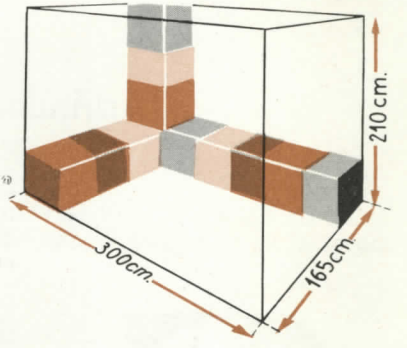
64. ¿Cuál es el menor número de objetos de 1,15 pesetas que se pueden comprar empleando sólo monedas de 5 pesetas, de modo que no sobre nada?

65. Cuatro hombres pueden caminar 105, 112 y 168 km, respectivamente, por semana. ¿Cuál es la menor distancia que todos ellos pueden caminar en un número exacto de semanas?

66. En un escollo hay 3 faros: uno gira en 2 minutos 12 segundos; otro, en 3 minutos 7 segundos; el tercero, en 3 minutos 24 segundos. Lucen juntos a las 12 de la noche. ¿Cuándo volverán a lucir juntos?

67. Dos ruedas dentadas que engranan tienen: una 32 dientes y la otra 36 dientes. La mayor da 60 revoluciones por segundo. ¿Cuántas veces estarán los mismos dientes en contacto durante 6 días de trabajo de 10 horas cada uno?

68. Las dimensiones de una caja son: 1,65 m, 2,1 m y 3 m. Se hacen construir cajas cúbicas las mayores que sea posible, cuyo lado sea un número exacto de cm y con las cuales se pueda llenar completamente la caja. Halla el lado y el número de estas cajas.



69. Seis campanas tocan a intervalos de 3, 5, 7, 8, 9 y 19 segundos, respectivamente. ¿Qué tiempo pasa entre dos toques simultáneos de todas las campanas?

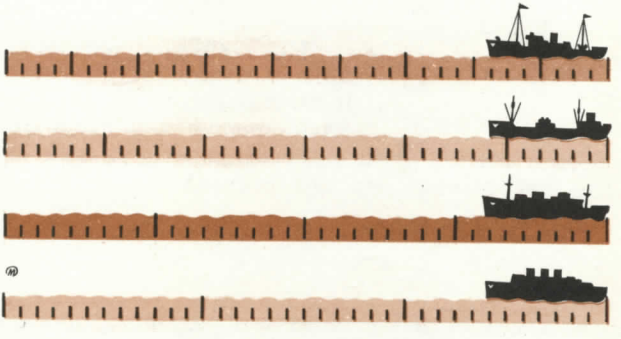
70. Las ruedas delanteras de un coche miden 2,75 m de circunferencia y las traseras 3,30 m. ¿Cuál es la menor distancia que debe recorrer el coche para que las ruedas delanteras y traseras den un número entero de vueltas? ¿Cuántas veces sucederá esto en 2 km?

71. Al contar las canicas de 4 en 4, de 5 en 5, de 6 en 6, un niño halla que cada vez le quedan 2. ¿Cuál es el número de sus canicas, sabiendo que está comprendido entre 100 y 150?

72. ¿Cuáles son los números inferiores a 60, primos con 4?, ¿con 6?

73. Indica la serie de múltiplos comunes a: a) 12 y 18; b) 18 y 240; c) 24 y 36.

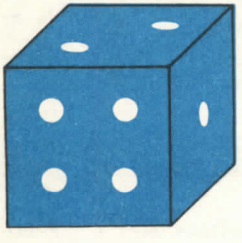
74. Cuatro vapores salen para el mismo destino: el primero cada 4 días, el segundo cada 6, el tercero cada 9 y el cuarto cada 12. Salieron juntos el 1 de marzo, ¿cuándo volverán a salir juntos?



25

Unidades de volumen

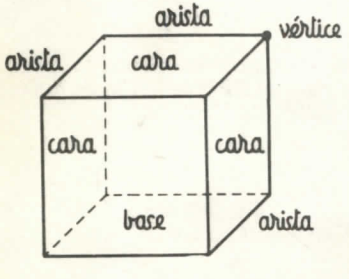
154. El cubo.—Observemos un dado. Si prescindimos de la materia de que está hecho, de su color, etc., constituye un *cuerpo geométrico* denominado *cubo*.



Está limitado por 6 cuadrados iguales, llamados *caras*.

Cada uno de los lados comunes a dos de estos cuadrados es una *arista* del cubo.

Cada vértice de una cara (común a otras dos caras) es un *vértice* del cubo. ¿Cuántas caras, aristas y vértices tiene el cubo?



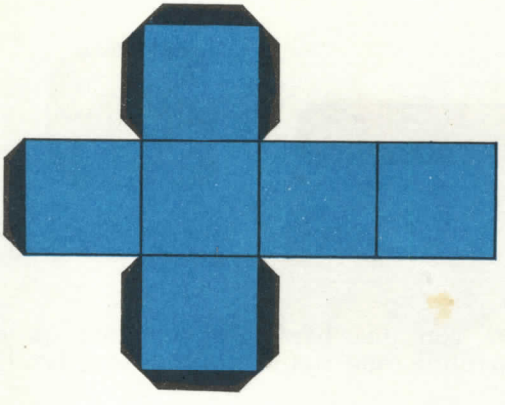
El cubo tiene 6 caras cuadradas, 12 aristas iguales y 8 vértices.

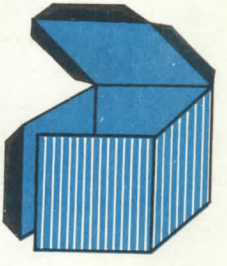
155. Planos paralelos.—Supongamos una cara de un cubo prolongada indefinidamente en todos los sentidos. Es lo que se denomina un *plano*. Hagamos lo mismo con la *cara opuesta*, o sea, la que se encuentra enfrente. ¿Se encontrarán los dos planos?

Nunca, por mucho que se prolonguen. Se dice que son *paralelos*.

Las caras opuestas de un cubo son paralelas, o sea, se encuentran en planos paralelos.

156. Construcción del cubo.—Dibujemos en una cartulina las seis caras del cubo. Doblemos después por las aristas y peguemos las pestañas señaladas en color oscuro.





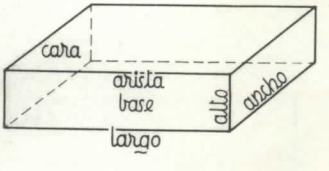
157. El ortoedro.—Observemos una caja de cerillas. Prescindiendo de la materia de que está hecha y atendiendo sólo a la forma, constituye un cuerpo geométrico, llamado *ortoedro.*

Está limitado por seis rectángulos, dos a dos iguales y paralelos, llamados *caras.* ¿Cuántas aristas y vértices tiene?

Como el cubo, el ortoedro tiene 6 *caras,* 12 *aristas y* 8 *vértices.*

Hay tres grupos de 4 aristas iguales entre sí.

La longitud común de las 4 aristas de uno de estos grupos se llama una *dimensión* del ortoedro. Así éste tiene *tres dimensiones: lo largo, lo ancho y lo alto.*



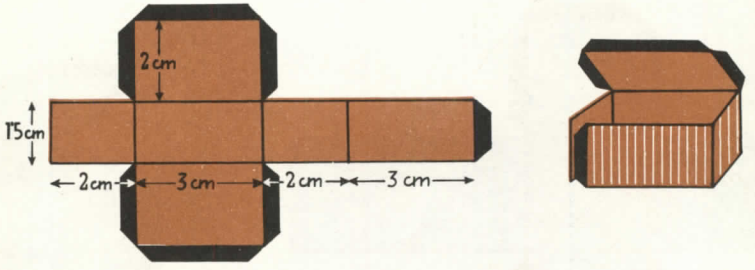
Si se supone que el ortoedro reposa sobre el suelo, la cara en contacto con el mismo se llama **base,** así como la cara opuesta. Las restantes son las **caras laterales.**

El cubo es un ortoedro cuyas tres dimensiones son iguales.

158. Construcción del ortoedro.—Queremos construir un ortoedro de 3 cm de largo, 2 cm de ancho y 1,5 cm de alto. Dibuje-

mos en un cartón sus seis caras, como se indica en la figura.

Doblemos después por las aristas y peguemos las pestañas señaladas en color oscuro.



EJEMPLOS. 1.° Construye con una barra de *plastilina* un ortoedro, recubriéndolo de cartulina, que fijarás fácilmente a la plastilina mediante alfileres.

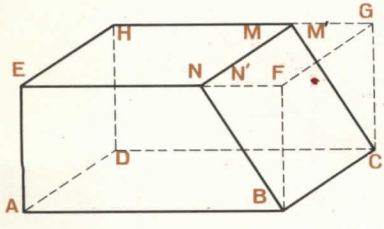
A esta cartulina la llamaremos, por la función que desempeña, **borde del ortoedro,** compuesto de polígonos, que hemos llamado **caras**.

2.° Señala en la clase los ortoedros que encuentres.

3.° Dos aristas, si son paralelas y no pertenecen a la misma cara, se dice que son **opuestas.**

Define **plano diagonal** de un ortoedro como el que contiene dos aristas opuestas.

159. Paralelepípedos.—Construye de plastilina un ortoedro *ABCDEFGH* y colócalo sobre la mesa. En la cara superior *EFGH* señala un segmento *MN* paralelo a uno de los lados menores. Da un corte en forma de cuña que pase por *MN* y por *BC*.



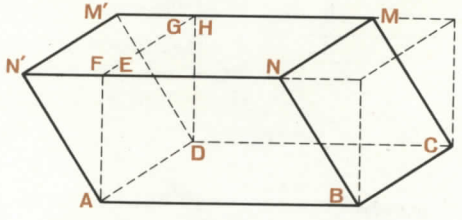
Coloca la cuña cortada de modo que la cara *BCGF* coincida con la *ADHE*.

Se obtiene así un cuerpo *ABCDMNM'N'*, llamado **paralelepípedo.**

Observa que ahora las aristas laterales no son perpendiculares a las bases, y que las caras de delante y de atrás son paralelogramos, pero no rectángulos.

En general, **paralelepípedo es un cuerpo cuyo borde está compuesto de seis paralelogramos dos a dos iguales.**

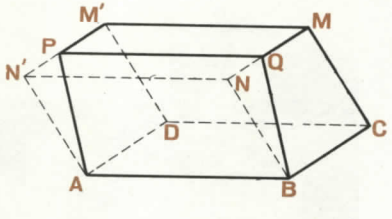
Un caso particular es el ortoedro, cuyas seis caras son rectángulos.

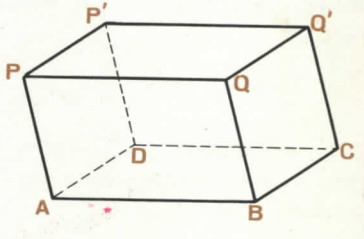


EJEMPLOS. 1.° En el paralelepípedo anterior traza en la base superior un segmento *PQ* paralelo a uno de los lados mayores *MM'*. Da un corte en forma de cuña que pase por *PQ* y *AB*. Une la cuña cortada al cuerpo obtenido, por la cara de detrás.

Obtienes así un nuevo paralelepípedo, el *ABCDPQQ'P'*. ¿Cómo son sus caras?

Las dos bases son rectángulos, pero las cuatro caras laterales son paralelogramos.





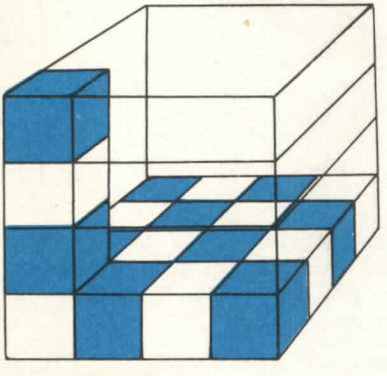
2.° Sirviéndote del paralelepípedo *ABCDPQQ'P'*, ¿cómo construirías un paralelepípedo con las seis caras paralelogramos?

Bastaría trazar en la cara de delante un segmento paralelo a *AP* y dar un corte que pase por dicho segmento y por *DP'*.

160. Volumen.—Así como la medida de la extensión de una línea es su longitud, y la medida de la extensión de una superficie

es su área, así la medida de la extensión de un cuerpo geométrico en el espacio es su *volumen*.

161. Volumen del cubo.—Tomemos de momento como unidad de volumen el de un cubo de 1 cm de arista, al que denominaremos *centímetro cúbico*. Se escribe cm^3.



Hallemos el volúmen de un cubo de 4 cm de arista. ¿Cuántos cubos de 1 cm^3 hay en cada capa?

$$4 \times 4 = 16 \text{ cm}^3$$

¿Cuántas capas idénticas a la anterior llenan el cubo?

4 capas

Volumen del cubo $= 4 \times 4 \times 4 = 64$ cm^3.

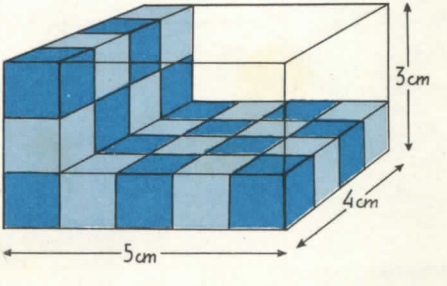
Volumen del cubo = arista × arista × arista = a^3

162. Volumen del ortoedro.—¿Cuántos cubos de 1 cm^3 se pueden colocar sobre el fondo del ortoedro?:

$$5 \times 4 = 20 \text{ cm}^3$$

¿Cuántas capas análogas a la anterior pueden meterse en el ortoedro?

3 capas



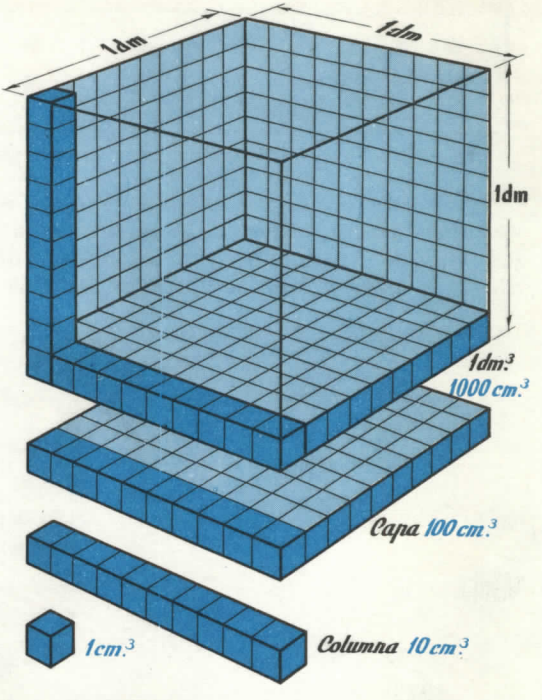
Número de cubos de 1 cm^3 que caben en el ortoedro:

$$20 \times 3 \text{ cm}^3 = 5 \times 4 \times 3 \text{ cm}^3$$

Volumen del ortoedro = largo × ancho × alto

163. Unidades de volumen.—Fíjate en la figura adjunta, que representa un cubo de 1 dm de arista. Su volumen es la unidad llamada *decímetro cúbico*. Se escribe dm^3.

Se puede dividir en 10 *capas*, compuesta cada una de 10 *columnas* de 10 cm^3 cada una.



$$1\ dm^3 = 10 \times 10 \times 10\ cm^3 = 1000\ cm^3$$

Del mismo, el centímetro cúbico se puede dividir en 1000 milímetros cúbicos (mm^3).

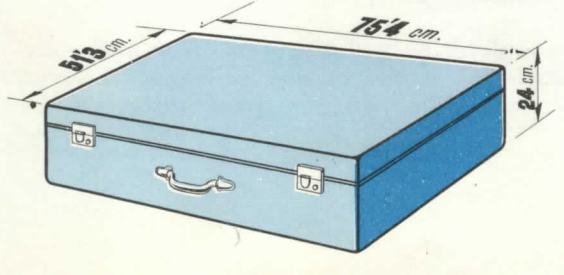
$$1\ cm^3 = 1000\ mm^3$$

La unidad fundamental de volumen es el *metro cúbico* (m^3), que es el volumen de un cubo de 1 m de arista:

$$1\ m^3 = 1000\ dm^3 = 1\,000\,000\ cm^3 = 1\,000\,000\,000\ mm^3$$

Las unidades de volumen aumentan y disminuyen de 1000 en 1000.
1 dm^3 es la *milésima* parte del m^3 (0,001 m^3).
1 cm^3 es la *millonésima* parte del m^3 (0,000001 m^3).
1 mm^3 es la *milmillonésima* parte del m^3 (0,000000001 m^3).

164. Problema.—*Una maleta, modelo avión, tiene las dimensiones indicadas en la figura. Halla su volumen en centímetros cúbicos, en milímetros cúbicos y en decímetros cúbicos.*



El volumen es: $75{,}4 \times 51{,}3 \times 24\ cm^3 = 92832{,}48\ cm^3$

Volumen $= 92832{,}48\ cm^3 = 92832480\ mm^3 = 92{,}83248\ dm^3$

m^3	dm^3	cm^3	mm^3
0 0 0	0 9 2	8 3 2	4 8 0

Se necesita un grupo de tres cifras para representar cada unidad.

165. Medición de volúmenes.—No existen medidas prácticas de volumen. La Geometría nos enseña a determinar el volumen de los cuerpos, midiendo ciertas longitudes de los mismos. Así nos dice que para hallar el volumen de una habitación (núm. 162) basta

multiplicar lo largo por lo ancho y por lo alto. Si, por ejemplo, el largo es 8 m, la anchura 6,5 m y la altura 4,5 m, el volumen de la habitación será:

$$8 \times 6{,}5 \times 4{,}5 = 234 \text{ m}^3$$

166. Reducción de complejos a incomplejos y viceversa.—Supongamos que al medir el volumen de una habitación se obtenga el número complejo 372 m^3, 5 dm^3, 43 cm^3. Pero como 372 m^3 son 372000000 cm^3, y 5 dm^3 son 5000 cm^3, el volumen de la habitación será:

$$372000000 + 5000 + 43 = 372005043 \text{ cm}^3$$

Para convertir un complejo de volumen en incomplejo del orden inferior, se escriben las cifras de los órdenes sucesivos, reservando tres lugares para cada orden y poniendo ceros en los huecos que resulten.

Así, el complejo 52 dm^3, 3 cm^3, 608 mm^3 puede escribirse 52003608 mm^3, como se ve en el cuadro que va a continuación.

Recíprocamente:

Para convertir incomplejos de volumen en complejos, se separan las cifras de tres en tres, a partir de la coma, y se les pone las denominaciones correspondientes a sus órdenes. La cifra de las unidades es del mismo orden que el incomplejo.

Por ejemplo, 5023715,67 cm^3 puede escribirse 5 m^3, 23 dm^3, 715 cm^3, 670 mm^3, según puede observarse en el cuadro que va a continuación:

167. Cambio de unidad.—Sea, por ejemplo, el número 37,6254 m^3. Para expresarlo en dm^3, cm^3 o mm^3, basta multiplicarlo por 1000, 1000000, 1000000000, ya que:

$$1\ m^3 = 1000\ dm^3 = 1000000\ cm^3 = 1000000000\ mm^3$$

Por tanto,

$$37{,}6254\ m^3 = 37625{,}4\ dm^3 = 37625400\ cm^3 = \text{etc.}$$

Para pasar de una unidad de volumen a otra de orden inferior, se multiplica el número dado por la unidad seguida de un número de ceros triple que el de los lugares que hay desde la unidad que se da hasta la que se quiere transformar.

Al contrario, para transformar el número dado en unidades de orden superior habrá que dividir por 1000, 1000000, etc. Así:

$$5023715{,}67\ cm^3 = 5023{,}71567\ dm^3 = 5{,}02371567\ m^3$$

Para pasar de una unidad de volumen a otra de orden superior, se divide el número dado por la unidad seguida de un número de ceros triple que el de los lugares que hay desde la unidad que se da hasta la que se quiere transformar.

CALCULO MENTAL

- *Convierte* en cm^3: la décima de m^3; 10 dm^3; 7250 mm^3; 5 dm^3; 3 m^3; la centésima de dm^3; $\frac{1}{2}$ m^3; $\frac{1}{4}$ dm^3.

- *Busca* el complemento:

1 m^3 = 300 dm^3 + ...	1 cm^3 = 75 mm^3 + ...
1 dm^3 = 275 cm^3 + ...	1 dm^3 = 850 cm^3 + ...
1 cm^3 = 450 mm^3 + ...	1 m^3 = 550 dm^3 + ...

- *Expresa* en cm^3:

3 dm^3 + 27 cm^3	2 m^3 + 125 dm^3
28 dm^3 + 7 cm^3	1 m^3 + 75 dm^3
125 dm^3 + 374 cm^3	13 m^3 + 8 dm^3

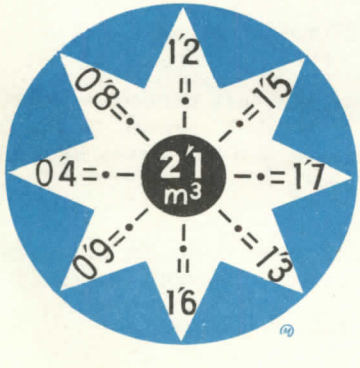
- *Lee* los siguientes números, descomponiéndolos en los diversos órdenes de unidades:

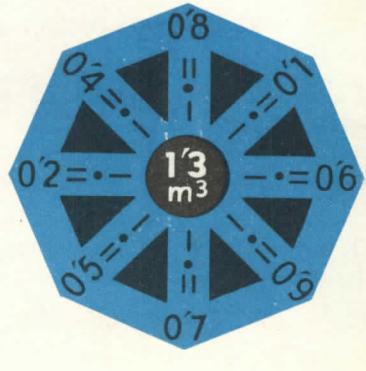
232,45 dm^3	37,45 m^3	41189762 mm^3
8003076 mm^3	5118,3746 dm^3	5974,124 m^3
6082,54 cm^3	3114,21 cm^3	1276,3184 cm^3

- *Completa* las siguientes igualdades:

18 m^3 = ... dm^3	7284 dm^3 = ... m^3
0,49 dm^3 = ... cm^3	12,33 m^3 = ... cm^3
13118 cm^3 = ... dm^3	74,6 cm^3 = ... mm^3
1939 dm^3 = ... cm^3	18628 mm^3 = ... cm^3

- *Resta* del número del centro:





- *Busca* la unidad que corresponda:

3,87 dm^3 = 3870 ...	1500 dm^3 = 1,5 ...
1228 cm^3 = 1228000 ...	37,4 cm^3 = 37400 ...
500 cm^3 = 0,5 ...	58 dm^3 = 0,058 ...

EJERCICIOS

Expresa en decímetros cúbicos:

1. 3,421 m^3. **2.** 0,08 m^3. **3.** 4090 cm^3. **4.** 0,009 dam^3.

Reduce a incomplejo del orden inferior los complejos:

5. 3 dam^3, 25 m^3, 700 dm^3. **6.** 17 dam^3, 8 m^3. **7.** 90 m^3, 70 dm^3.

8. 0,1 dam^3, 40000 cm^3. **9.** 0,25 hm^3, 4 dam^3. **10.** 29 km^3, 0,07 hm^3.

Reduce a complejos los incomplejos siguientes:

11. $\frac{5}{8}$ de dm^3. **12.** $\frac{203}{1250}$ de m^3. **13.** $2\frac{3}{4}$ de dm^3.

14. 1213450 cm^3. **15.** 273818 mm^3. **16.** 12517 dm^3.

17. Un cubo tiene 4,5 cm de arista. ¿Cuál es el área de una cara?; ¿el de las 6 caras?; ¿el volumen?

18. Un dado tiene 2 cm de arista. ¿Cuál es el área de una de sus caras? ¿El área total? ¿El volumen?

19. Los trozos cúbicos de jabón de 7,5 cm de arista se remiten en cajas cúbicas de 60 cm de arista. ¿Cuántos trozos puede contener la caja?

20. Una maleta tiene 0,85 m de largo, 0,60 m de ancho y 0,3 m de alto. ¿Cuál es el área de su superficie exterior? ¿Su volumen?

21. ¿Qué volumen de aire hay en una habitación de 7,5 m de larga, 5,4 m de ancha y 3,2 m de alta?

22. ¿Cuál es el área de la superficie exterior de la caja de zapatos de la figura adjunta? ¿Cuál es su volumen? ¿Cuál la longitud de la cinta con que está atada?

23. Una piscina de 75 m de larga y 40 m de ancha se recubre de una capa de hielo de 6 cm de espesor. Calcula el volumen del hielo, en dm^3.

24. ¿Cuánto se pagará por abrir una zanja de 37,5 m de larga, 1,5 m de ancha y 2,3 m de profunda, a razón de 45 pesetas el m^3?

25. Un estanque ha de contener 15 m^3 de agua. ¿Qué altura le daremos, si su base tiene 6 m^2 de área?

Observa que despejando en la fórmula del volumen del ortoedro:

$$\text{base} = \frac{\text{volumen}}{\text{altura}}; \qquad \text{altura} = \frac{\text{volumen}}{\text{base}}$$

26. Un depósito de 3,45 m de alto contiene 8625 dm^3 de aceite. ¿Cuánto mide la base de dicho depósito?

27. En un campo de 3650 m^2 han caído durante una tormenta 125 m^3 de agua. ¿Cuál sería la altura del agua, en cm, si no se hubiera filtrado?

28. Una caja de cerillas tiene las siguientes dimensiones: 5 cm de largo, 4 cm de ancho y 2 cm de alto. ¿Cuál es su volumen, y cuántas se podrían colocar en una caja cuyas dimensiones interiores son: 1,5 dm, 1,2 dm y 1 dm.

29. En una casa han gastado en un mes 12 dam^3 y 137 m^3 de agua. ¿Cuánto habrán de pagar, a 4,50 ptas. el m^3?

30. Una caja de 1,275 m^3 de volumen se ha llenado con trozos de jabón de 250 cm^3. ¿Cuántos trozos contiene?

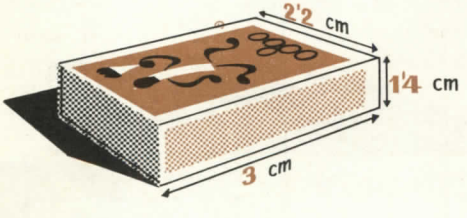
31. Se han comprado dos maderos, uno de 123,07 dm^3; el otro de 242,36 dm^3, a 375 pesetas el m^3. ¿Por cuánto hay que venderlos para tener un beneficio de 57 pesetas?

32. Un grifo da 135 dm^3 de agua por minuto. ¿Cuánto tiempo será necesario para llenar un depósito de 7 m^3 20 dm^3?

33. Se ha cavado una zanja de 115 m^3. La tierra removida aumenta en 1/5 de su volumen primitivo. ¿Cuántos volquetes hay que llevar con esta tierra, sabiendo que cada volquete puede contener 2300 dm^3?

34. El dm^3 de mercurio pesa 13,6 kg y cuesta 105 pesetas el kg. ¿Cuánto habrá que pagar para tener 375 cm^3 de mercurio?

35. Para construir una pared se han utilizado 1324 ladrillos de 4,5 dm^3 cada uno. Hallar el volumen total de la pared, sabiendo que se ha utilizado 0,150 m^3 de mortero.



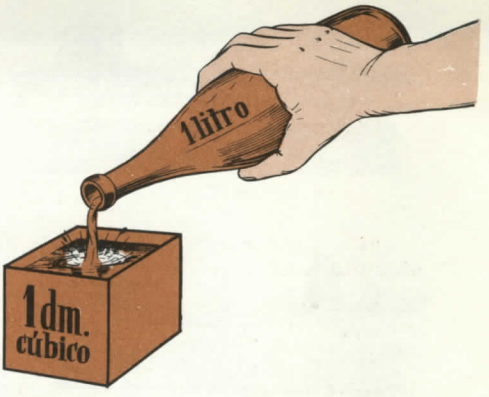
36. Con los datos del gráfico adjunto, plantea un problema, y resuélvelo.

37. Sobre un campo rectangular de 150 m de largo y 115 m de ancho, han caído durante una tempestad 18 mm de agua. ¿Cuántos m^3 de agua han caído sobre el campo?

38. Se han fabricado en un año 25628 piezas de jabón corriente. Cada pieza tiene 750 cm^3 de volumen. ¿Cuántos m^3 de jabón se han fabricado?

26

Unidades de capacidad y de masa (peso)



168. Unidades de capacidad.— Se llama *capacidad* de una vasija o recipiente cualquiera a su *volumen interior.*

Medidas de capacidad son las que sirven para medir los líquidos y ciertas materias secas (cereales, legumbres, etc.).

La unidad fundamental es el litro, que es *la capacidad de un decímetro cúbico.*

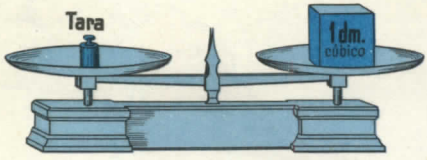
Los *múltiplos* y *submúltiplos* son los mismos que los del metro.

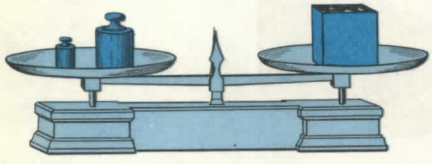
Son:

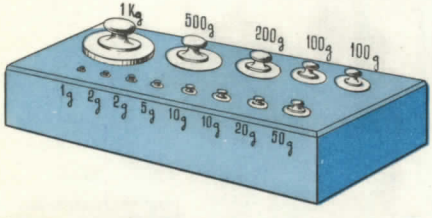
kilolitro (kl) = 1000 litros
hectolitro (hl) = 100 litros
decalitro (dal) = 10 litros
decilitro (dl) = 0,1 litros
centilitro (cl) = 0,01 litros
mililitro (ml) = 0,001 litros

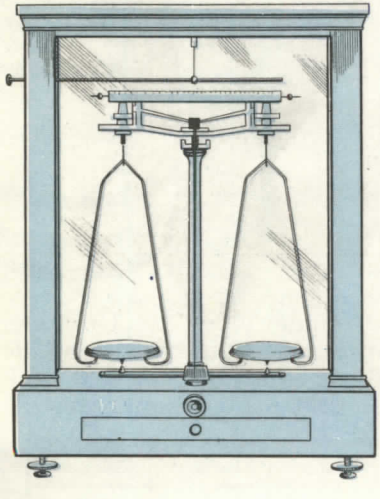
Estas unidades aumentan y disminuyen de 10 en 10. Un tonel que contiene 12 hl, 5 litros y 8 decilitros tiene una capacidad de 1205,8 litros. Y una vasija de 1802 mililitros contiene 1 litro, 8 decilitros y 2 mililitros, como puede verse en el cuadro siguiente.

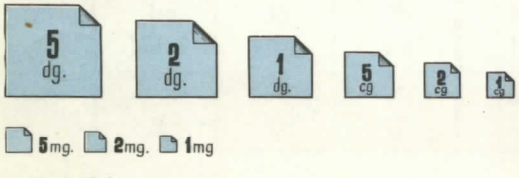
Ud.ª de Mil.	*Centena*	*Decena*	*Unidad*	*Décima*	*Centésima*	*Milésima*
kl. 1.000	hl. 100	dal. 10	l. 1	dl. 0 1	cl. 0 0 1	ml. 0 0 0 1
1	2	0	5 1	8 8	0	2











169. Unidades de masa (peso).—*La masa o cantidad de materia de un cuerpo* se toma en el lenguaje vulgar como sinónimo de *peso*, o *fuerza con que la Tierra lo atrae.*

¡Cuidado con confundir estos dos conceptos!

La unidad fundamental es el *kilogramo* (kg) *que es la masa de 1 litro de agua pura a* 4° C.

Para pesar con la *balanza de Roberval* se coloca en un platillo el cuerpo y en el otro las pesas marcadas de una *caja de pesas.*

Los submúltiplos del kilogramo son:

hectogramo (hg)	**= 0,1 kg**
decagramo (dag)	**= 0,01 kg**
gramo (g)	**= 0,001 kg**

Los submúltiplos del gramo son:

decigramo (dg)	**= 0,1 g**
centigramo (cg)	**= 0,01 g**
miligramo (mg)	**= 0,001 g**

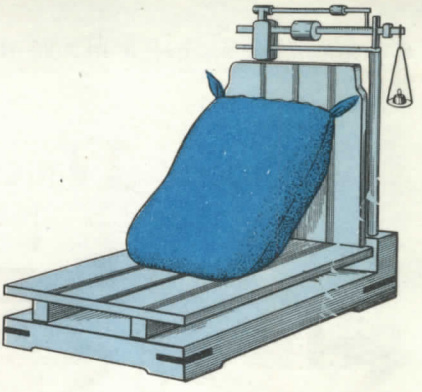
Estos últimos se emplean para las pesadas de precisión (farmacéuticos, químicos, etc.). En las balanzas de precisión se emplean pesas en forma de laminillas; son de aluminio.

Los múltiplos del kilogramo son:

Miriagramo (mag)	**= 10 kg**
Quintal métrico (q)	**= 100 kg**
Tonelada métrica (t)	**= 1000 kg**

Para pesar grandes masas se emplea la *báscula*. El carbonero compra el carbón por toneladas y lo vende en las casas por quintales.

Las unidades de peso aumentan y disminuyen de 10 en 10. Un cuerpo de 1 t, 5 q y 7 kg de masa pesa 1507 kg, y otro de 2805,7 g pesa 3 kg, 8 hg, 5 g y 7 dg, según puede verse en el cuadro adjunto:



U. Millón	C. de Mil	D. de Mil	U. de Mil	Centena	Decena	Unidad	Décima	Centésima	Milésima
t	q	mag	kg	hg	dag	g	dg	cg	mg
1	5	0	7 3	8	0	5	7		

170. Comparación de las unidades de capacidad, masa y volumen.—De las definiciones anteriores se deducen las siguientes correspondencias, referidas al agua pura:

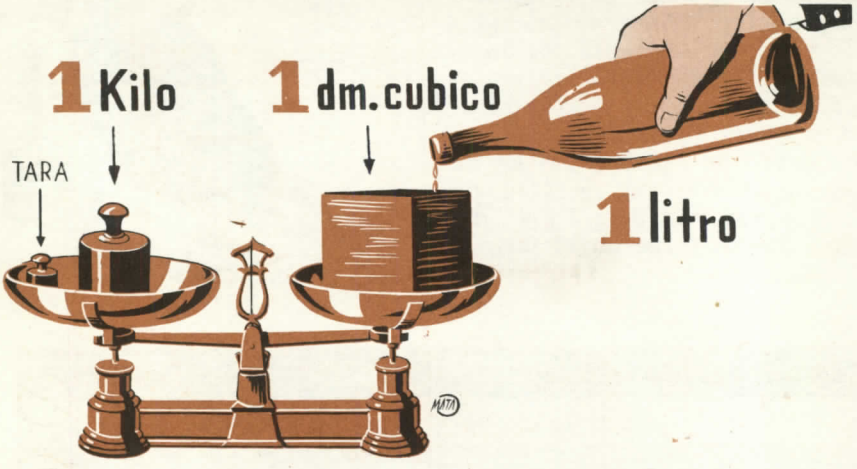
CAPACIDAD	kl.	hl.	dal.	1 litro	dl.	cl.	ml.			
MASA (peso)	t.	q.	mag.	1 kg	hg.	dag.	g.	dg.	cg.	mg.
VOLUMEN	m^3			$1dm^3$			cm^3			mm^3

CALCULO MENTAL

- *Expresa* en gramos y en kilogramos:

20 t; 5 mag; 7 q;
725 dag; 225 kg; 32 mag.

- *Convierte* en hl: 5 kl; 75 dal; 1250 l; 4200 dl; 1500 dal.



- *Completa:*

El doble hl = ... l	El medio dal = ... l
El medio l = ... cl	El doble dl = ... cl
El dal = ... dl	El medio hl = ... dl

- *Reduce a gramos:*

3 dag + 7 g	2 kg + 5 hg + 8 g
4 hg + 5 dag	3 q + 7 kg + 8 dag
25 hg + 2 g	3 hg + 5 dag + 1 g

- *Lee*, descomponiendo en las diversas unidades:

38,716 kg	698,431 g	58,243 hl
9,8095 t	3,002 hg	6,02806 kl
7120,7 g	169,5 kg	2984,6 dl

- *Completa:*

7,08 hl = ... dal = ... kg	93,6 dal = ... l = ... hg
295 l = ... dl = ... g	832 kg = ... l = ... hl
15,54 hl = ... kl = ... q	1,23 t = ... l = ... q

- *Contesta:* ¿Cuántos garrafones se pueden llenar con el tonel de la figura? ¿Cuántos litros?, ¿cuántos vasos? ¿Cuántas copas

con el vaso?, ¿con el garrafón? ¿Cuántos vasos con el litro?, ¿con el garrafón?

EJERCICIOS

1. Expresa:

   a) en litros: 250 cl; 6,97 kl; 0,046 hl; 16200 ml; 0,075 kl.
   b) en hl: 830 dal; 35000 dl; 1 dal; 0,7 kl; 37 dal.

2. Reduce a dl:

   4 hl; 75000 cl; 3,7 kl; 5000 cl; 5 kl.

3. Reduce a incomplejo del orden inferior los complejos siguientes:

   a) 3 dal, 8 l, 3 dl;
   b) 17 hl, 5 l, 7 cl;
   c) 7 l, 2 cl, 5 ml;
   d) 6 kl, 3 dal, 5 l.

4. Reduce a complejos los incomplejos siguientes:

   78 l; 3800 dl; 21 hl; 75 hl; 98 kl.

5. ¿De qué unidades hay que servirse para medir 187,5 litros de modo que se empleen el menor número posible?

Convierte:

6. En g: 1700 dg; 25 kg; 35 kg; 2,5 q.

7. En kg: 2500 dg; 14,73 t; 20000 mg; 7 q.

8. En cg: 32,8 dag; 37 hg; 2 g; 1,6 hg.

9. ¿Cuál es el peso de un hl de agua? ¿De un dal? ¿De 1 dl? ¿De 1 cl?

Halla el peso:

10. En g: de 2 dal de agua; de 5 cl; de 0,073 l.

11. En kg: de 3 hl de agua; de 73 dl; de 4 kl; de 7 dal.

12. En dg: de 7 cl de agua; de 750 ml; de 5,73 cl.

13. En q: de 12 kl de agua; de 3850 l; de 283 dal.

14. Un litro de vino cuesta 4,25 pesetas. ¿Cuánto cuesta el dal? ¿El hl? ¿2,28 hl?

15. Una cuba tiene una capacidad de 0,023 kl. ¿Cuántos doble-decilitros puede contener?

16. Una bomba saca 90 l de agua por minuto. ¿En cuánto tiempo vaciará un depósito de 15 kl de capacidad?

17. Un hombre respira 16 veces por minuto. Cada vez introduce en sus pulmones 4,5 dl de aire. ¿Cuál es, en kl, la cantidad de aire inspirado en 24 horas?

18. Un grifo da 4,5 litros de agua por minuto. Se le deja abierto durante 4 h 15 mn. ¿Cuántos litros se necesitan aún para llenar un depósito cuya cabida es 1,64 kl?

19. Un comerciante ha comprado café a 61,50 pesetas el kg, y lo vende a 22,50 pesetas el paquete de 25 dag. ¿Qué beneficio obtiene en la venta de 1 q de café?

20. Rosita compra 3 kg, 4 hg y 2 dag de fruta a 11,50 ptas. el kg. ¿Cuánto ha pagado?

Observa sobre el mostrador las diversas pesas de una caja de pesas.

21. Una garrucha eleva 3,6 kl de agua por hora de un pozo. ¿Cuántas horas necesitará para extraer 279 kl?

22. Un embalse contiene 120 millones de kl de agua. En verano pierde cada día 750000 kl. ¿Qué peso de agua le quedará después de 25 días de verano?

23. La locomotora de un tren consume 45 kg de carbón por km recorrido. ¿Cuántas toneladas gasta en un viaje de 630 km?

24. Un bidón tiene una capacidad de 7,5 litros. Está lleno de ácido sulfúrico, que vale 37 ptas. el litro. ¿Cuánto cuesta el contenido del bidón lleno?

25. Compro un trozo de carnero de 780 g de peso. ¿Cuál es su coste, sabiendo que el kg cuesta a 35 ptas.?

26. ¿Cuántas "cañas" de cerveza de 2,5 dl salen de un barril de 36 litros?

27. El motor de una avioneta consume 93 litros de gasolina por hora de vuelo. ¿Qué distancia ha recorrido en un viaje en que ha gastado 744 litros y ha ido a una velocidad de 230 km/h?

28. ¿Cuántos gramos pesan 16 litros de agua, y cuántos mg 34 ml de agua?

29. Halla la capacidad de un recipiente que puede contener 86 g de agua.

30. Una copa de licor contiene 25 ml del mismo. ¿Cuántas de dichas copas se pueden llenar con una botella de 2 litros? ¿Cuánto cuesta cada copa, a 120 ptas. la botella?

31. ¿Cuántos vasos de 3 dl de capacidad se pueden llenar con un garrafón de 15 litros?

32. Un grifo da 54 litros por minuto. ¿Cuánto tardará en llenar un depósito de 27 kl de cabida?

33. Un grifo, que da 75 litros por minuto, tarda 2 horas y media para llenar un depósito. ¿Cuál es, en kl, la cabida del mismo?

34. En un depósito caben 10,8 kl de agua. Si un grifo tarda en llenarlo 45 minutos, ¿cuántos litros da por minuto?

35. Se han echado 5 t y 8 q de agua en un estanque hasta llenarlo. ¿Qué capacidad tiene dicho estanque?

36. Una cocina de gas consume 256 litros por hora. Ha funcionado durante 68 horas en un mes. ¿Cuántos kl de gas ha consumido? ¿Cuánto se ha gastado, a razón de 6 ptas. el kl?

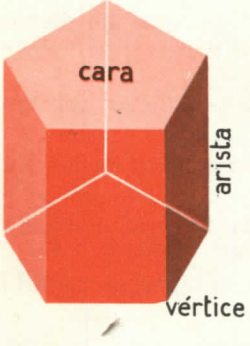
37. Un tonel pesa vacío 16 kg y lleno 194 kg. ¿Cuál es su capacidad en dal?

38. Un vaso lleno de agua pesa 216 g. Si se vacía la tercera parte, pesa 160 g. ¿Cuál es la capacidad del vaso?

27

Prismas

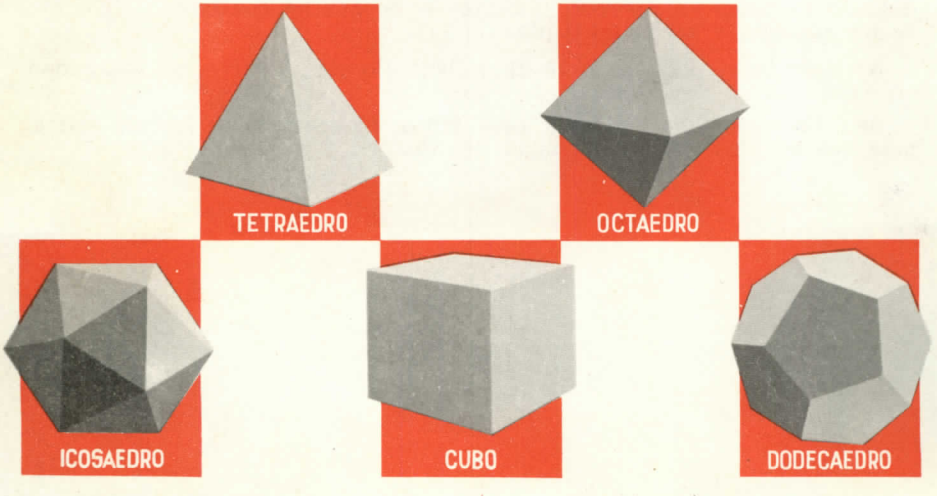
171. Poliedros.—Son los cuerpos geométricos limitados por cuatro o más polígonos planos. Los elementos que hemos de considerar en todo poliedro son: *sus caras*, que son los polígonos que lo limitan; las *aristas*, que son los lados de sus caras; los *vértices*, que son los de sus caras y los *ángulos diedros*, que son los formados por cada dos caras consecutivas.



Los poliedros que vamos a estudiar, por ser los más importantes y frecuentes en la práctica, son los poliedros regulares, los prismas y las pirámides.

¿Son poliedros los paralelepípedos?

172. Poliedros regulares.—Son aquellos cuyas caras son polígonos regulares, e iguales entre sí, y sus ángulos diedros son también iguales. Sólo existen cinco poliedros regulares, que son:



1.° El *tetraedro regular*, que tiene 4 caras, triángulos equiláteros y concurren 3 en cada vértice. ¿Cuántas aristas y vértices tiene?

2.° El *octaedro regular*, que tiene 8 caras, triángulos equiláteros, concurriendo 4 en cada vértice. ¿Cuántas aristas y vértices posee?

3.° El *icosaedro regular*, que tiene 20 caras, triángulos equiláteros y concurren 5 en cada vértice. Cuenta sus aristas y sus vértices.

4.° El *exaedro regular o cubo*, que tiene 6 caras que son cuadrados, concurriendo 3 en cada vértice.

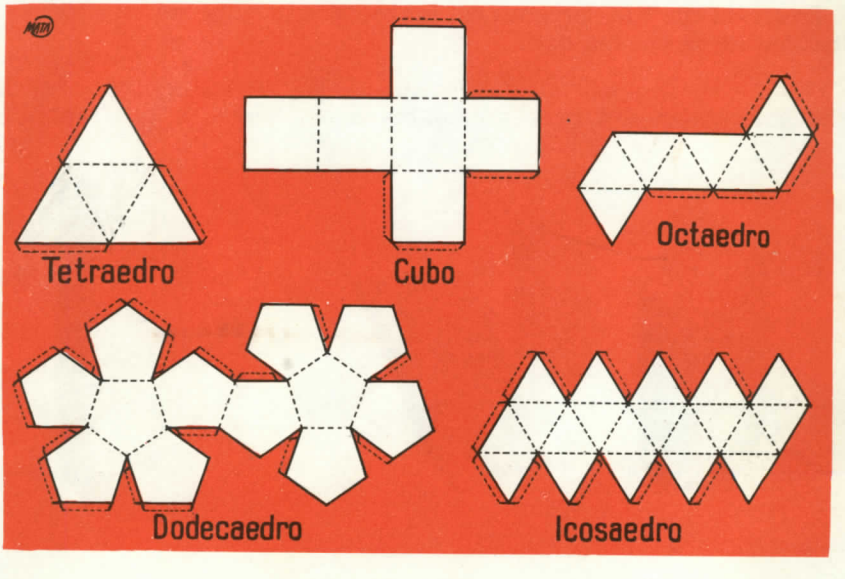
5.° El *dodecaedro regular*, que tiene 12 caras, pentágonos regulares, que concurren 3 en cada vértice.

173. Poliedros conjugados.—El cubo y el octaedro son *conjugados*: tienen el mismo número de aristas, 12; el número de caras del 1.°, 6, es igual al del vértice del 2.°; y, recíprocamente, el número de vértices del 1.°, 8, es igual al de caras del 2.°

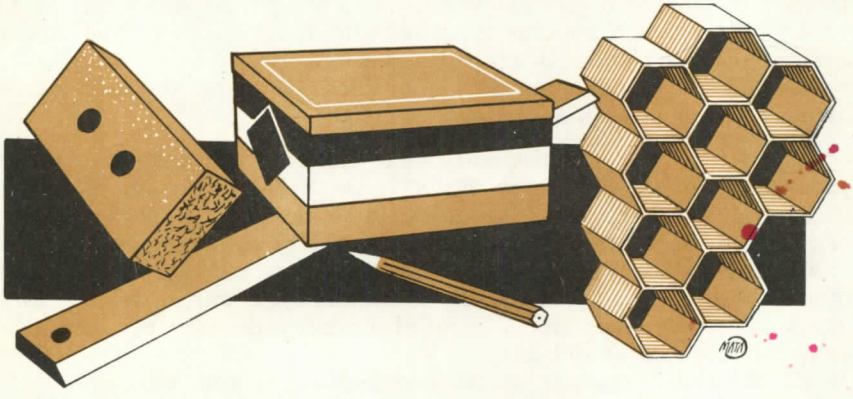
El icosaedro y dodecaedro también son *conjugados:* tienen el mismo número de aristas, 30; el número de caras del 1.°, 20; es igual al de vértices del 2.°; y el número de vértices del 1.°, 12, es igual al de caras del 2.°

El tetraedro regular es *autoconjugado*, o sea, conjugado de sí mismo: tiene el mismo número, 4, de caras que de vértices.

174. Construcción de los poliedros regulares.—En papel fuerte o cartulina dibuja las figuras que se indican, y después corta por las líneas exteriores. Dobla luego por las líneas punteadas y junta los bordes, que quedarán pegados engomando las pestañas exteriores.



175. Los prismas.—Observemos un ladrillo, una regla, una caja, un lápiz exagonal nuevo, sin punta, una celda de un panal de abejas. Son cuerpos geométricos denominados *prismas*. Un prisma está siempre limitado por dos polígonos paralelos e iguales, llamados *bases*, y por *caras laterales* que son paralelogramos.



El número de caras laterales es igual al de lados del polígono de la base.

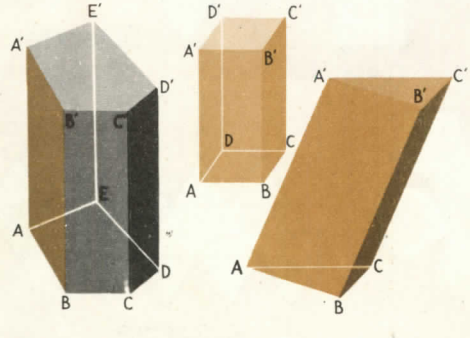
Los lados de las bases se llaman *aristas básicas*.

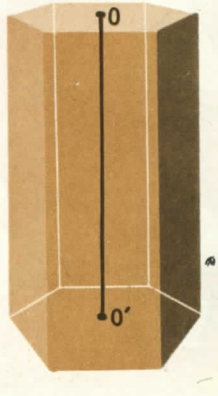
Los lados de las caras laterales se llaman *aristas laterales*. Estas son todas iguales y paralelas.

Altura del prisma es el segmento perpendicular a las bases comprendido entre éstas.

Diagonal de un prisma es la recta que une dos vértices no situados en la misma cara.

176. Clasificación de los prismas.—El prisma es *recto* si las aristas laterales son perpendiculares a las bases, y, por tanto, las





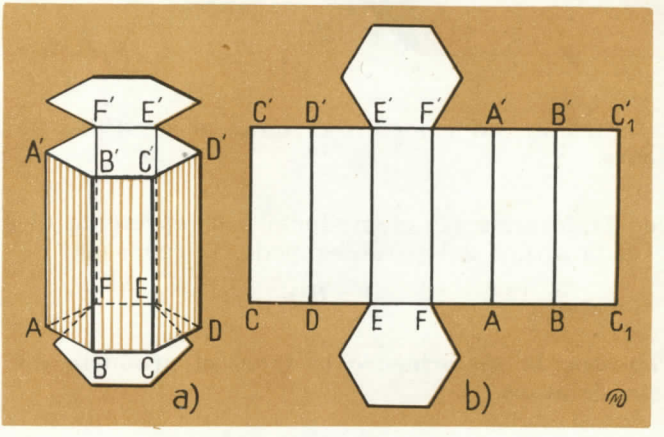
caras laterales son rectángulos. Es *oblicuo* si las aristas laterales son oblicuas a las bases, esto es, no son perpendiculares a las mismas.

Prisma *regular* es el prisma recto cuyas bases son polígonos regulares.

Por el número de lados que tengan las bases, los prismas se llaman *triangulares, cuadrangulares, pentagonales, exagonales,* etc.

Un *paralelepípedo* es un prisma cuyas bases son paralelogramos. Cualquiera de sus caras puede tomarse como base.

177. Desarrollo de un prisma recto.—Supongamos un prisma recto construido con cartulina, cuyas bases recortamos como está indicado. Cortemos ahora a lo largo de la arista CC' y extendamos la cartulina en el plano. Se obtiene así el *desarrollo del prisma recto,* que se compone de un rectángulo y de los dos polígonos de las bases.



La misma figura sirve para hacer la construcción del prisma recto.

178. Areas lateral y total del prisma recto.—*Area lateral* de un prisma es la suma de las áreas de sus caras laterales. *Area total* es la suma del área lateral y las áreas de las dos bases.

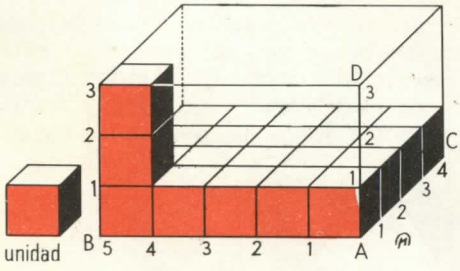
Supongamos las caras laterales del prisma recubiertas por un papel perfectamente ajustado. Cortémosle por una arista lateral y abrámosle. Extendiéndolo sobre un plano, presenta la forma de un rectángulo cuya base es el perímetro de la base del prisma y la altura la del prisma. Por tanto:

$$S = p \cdot a$$

El área lateral de un prisma recto es igual al producto del perímetro de la base por la altura.

El área total se obtiene añadiendo al área lateral el área de las dos bases.

179. Fórmulas del volumen del ortoedro.—Hemos visto en el número 162 que el volumen de un ortoedro que mida 5 cm de largo, 4 cm de ancho y 3 cm de alto, es



$$V = 6 \times 4 \times 3 = 72 \text{ cm}^3$$

En general, si son a, b y c las tres dimensiones, se tendrá:

$$V = a \cdot b \cdot c \qquad (1)$$

El volumen de un ortoedro es igual al producto de sus tres dimensiones.

Pero en la fórmula (1) el producto $b \cdot c$ representa el área B de la base y a la altura del paralelepípedo. Luego:

$$V = B \cdot a \qquad (2)$$

El volumen de un ortoedro es igual al producto del área de la base por la altura.

Como el *cubo* es un caso particular de paralelepípedo rectángulo en que las dimensiones son iguales, se tendrá:

$$V = a^3$$

siendo a la longitud de la arista.

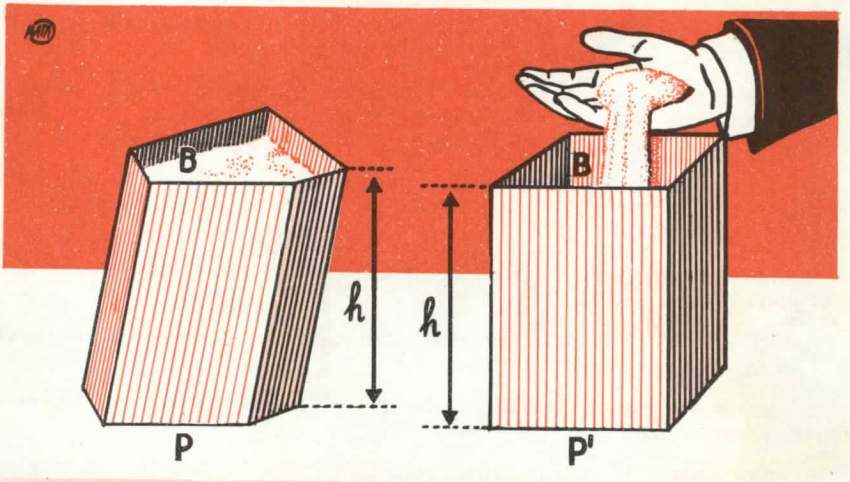
El volumen de un cubo es igual al cubo de su arista.

180. Volumen de un prisma cualquiera.—*Dos prismas que tienen la misma altura y bases equivalentes tienen el mismo volumen.*

Se comprueba construyendo dos prismas tales de cartón y viendo que contienen igual cantidad de arena fina.

Luego un prisma cualquiera P, recto u oblicuo, tiene el mismo volumen que un paralelepípedo rectángulo P' de igual altura y base equivalente a la de P. Por consiguiente:

Volumen $P = B \cdot h$



El volumen de un prisma cualquiera es igual al producto del área de su base por su altura.

EJEMPLO.—*¿Cuánto costará recubrir de cemento un estanque de forma de ortoedro de 6,50 m de largo, 4 de ancho y 3 de alto, a razón de 70 pesetas el metro cuadrado? ¿Cuánta agua contiene el estanque estando lleno?*

Area de la base: $6{,}5 \times 4 = 26$ m^2.

Area lateral: $(2 \cdot 6{,}5 + 2 \cdot 4) \cdot 3 = 21 \cdot 3 = 63$ m^2.

Superficie a recubrir: $63 + 26 = 89$ m^2.

Coste: $89 \cdot 70 =$ **6230 pesetas.**

Volumen del estanque: $26 \cdot 3 = 78$ m^3.

Luego, su capacidad es **78000 litros.**

EJERCICIOS

1. Halla el área total de un prisma recto cuya base tiene 3,60 m de perímetro y 450 m^2 de área, y cuya altura mide 2,5 m.

2. Las dimensiones de un paralelepípedo rectángulo son 4, 3,80 y 7,20 dm. Halla: 1.º, el área lateral; 2.º, el área total.

3. Calcula las áreas lateral y total de un prisma recto de 2,5 m de altura, cuya base es un rectángulo de 1,6 por 0,9 m. Idem siendo la base un cuadrado de 0,5 m de lado.

4. El mismo problema anterior, siendo la altura 6,6 m y la base un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 3 y 4 m y la hipotenusa 5 m.

5. Halla las áreas lateral y total de un prisma recto cuya altura mide 5,4 m y la base es un rombo cuyas diagonales miden 6 y 8 m, y el lado 5 m.

6. El mismo problema anterior, siendo la base un exágono regular de 1,20 m de lado y 1,04 m de apotema.

7. Halla la cabida en litros de un recipiente cúbico de 0,9 m de arista. Idem de 6,20 m.

8. La capacidad de un aljibe rectangular es de 225 Hl; su anchura es 2 m y su altura 2,50 m. Calcula su longitud.

9. ¿Cuántos dm^3 de tierra hace falta sacar para construir un depósito paralelepipédico de dimensiones 8,7 y 4 m?

10. Halla el área lateral de un prisma recto de 9 dm de alto y cuya base es un triángulo equilátero de 1,80 dm de lado.

11. ¿Qué longitud ha de tener la tela que se necesita para forrar un prisma recto de 12,65 m de alto y de base un cuadrado de 7,25 dm de lado? La tela tiene 0,75 m de anchura.

12. Halla el volumen de un prisma pentagonal de 24,5 m^2 de base y 8,76 metros de altura.

13. Halla la altura de un prisma recto de 10,4 dm^2 de área lateral y cuya base es un pentágono regular de 1,30 dm de lado.

14. Halla el área lateral de un prisma triangular regular de 2,24 m de alto y cuya base tiene 3,75 m de perímetro.

15. ¿Qué capacidad en litros tiene una caja de latón de 1,80 m de larga, 1,08 m de ancha y 0,6 m de profunda? Coste de la caja a razón de 15 pesetas el m^2 de latón.

16. Volumen de un prisma triangular recto, siendo la base del triángulo 1,02 m y la altura del mismo 0,40 m. La altura del prisma es 10,40 metros.

17. Un ferrocarril corre encima de un terraplén de 4 km de largo por 6 m de alto. Tiene una anchura superior de 8 m y una anchura inferior de 16 m. ¿Cuánta tierra hay acumulada en el terraplén?

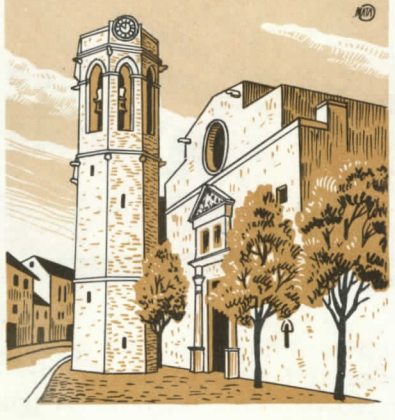
18. ¿Cuánto pesa el trigo de un granero de 8,67 m de largo y 10 m de ancho, estando lleno hasta una altura de 1,60 m? El Hl de trigo pesa 80 kg.

19. Se quiere construir un dique de piedra de 7,50 m de largo, 5,50 m de alto, 4,75 m de ancho en la base inferior y 2,25 m en la superior. El m^3 de piedra pesa 2600 kg y el kilogramo cuesta 0,15 pesetas. ¿Cuál es el coste de la piedra?

20. Se trata de hacer una trinchera de 11,50 m de larga, 3,80 m de ancha y 4,6 m de profunda. ¿Cuánto se pagará a razón de 15 pesetas el metro cuadrado?

21. Las dimensiones de una regla son 6 dm, 5 cm y 2 mm. ¿Cuál es el volumen?

22. ¿Cuánto pesa el aire contenido en una torre prismática de 25 m de altura y 37 m^2 de área de la base, sabiendo que un litro de aire pesa 1,293 g?



23. Una caja de galletas tiene forma de cubo de 0,35 m de arista. ¿Cuánto costará la hojalata de que está construida a razón de 17 pesetas el m^2? En la tapa hay que añadir 280 cm^2 de borde.

24. Halla el área de un tetraedro regular cuya arista mide 6 dm y la altura de cada cara 5,19 dm.

25. Idem de un octaedro regular y de un icosaedro regular con los datos del problema anterior.

28

Pirámides

181. Pirámides.—Consideremos un tejado de una torre prismática o de un campanario, la punta de un barreno, etc. *Son pirámides.*

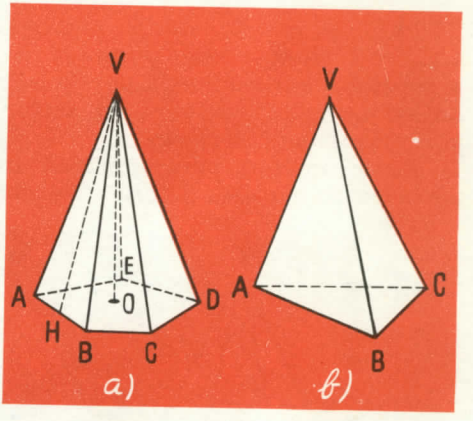
Una pirámide es un cuerpo geométrico limitado por un polígono, llamado *base* de la pirámide, y por *caras laterales*, que son triángulos con un vértice común. El número de caras laterales es igual al de lados de la base. Los lados de las bases se llaman *aristas básicas.*

Los lados de los triángulos laterales se llaman *aristas laterales.*

Vértice de la pirámide es el vértice común a todos los triángulos laterales.

Altura de la pirámide es el segmento de perpendicular a la base trazado por el vértice.

182. Clasificación de las pirámides.—La pirámide es *regular* cuando la base es un polígono regular, como la *ABCDE*, y el pie de la altura coincide con el centro *O* del polígono de la base. Entonces las aristas laterales son todas iguales, y las caras laterales son triángulos isósceles e iguales. Se llama *apotema* de una pirámide regular a la altura de uno cualquiera de los triángulos laterales, como el *VH*.



La pirámide es *irregular* cuando no se cumple una de las dos condiciones enunciadas para la pirámide regular.

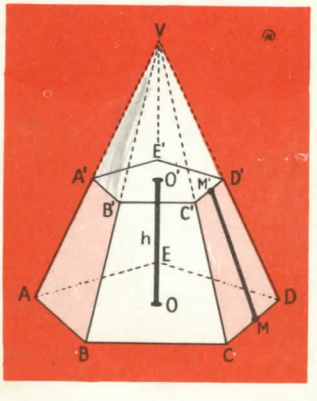
Las pirámides se llaman *triangulares, cuadrangulares, pentagonales*, etc., según que las bases sean triángulos, cuadriláteros, pentágonos, etc.

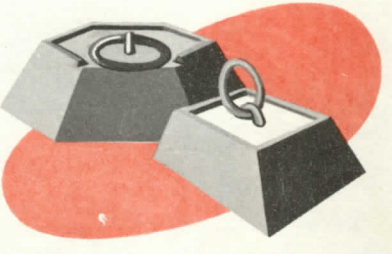
Tetraedro es una pirámide triangular. Cualquiera de sus cuatro caras puede tomarse como base.

183. Tronco de pirámide.—Si cortamos una pirámide *VABCDE* por un plano *A'B'C'D'E'* paralelo a la base, obtenemos una pirámide más pequeña, llamada *pirámide deficiente, VA'B'C'D'E'*, y un cuerpo, *A'B'C'D'E'ABCDE*, limitado por dos bases paralelas y caras laterales que son trapecios. Se le denomina *tronco de pirámide*.

Altura del tronco es la distancia *OO'* entre los planos de sus bases.

Si la pirámide es regular, el tronco de pirámide también lo es, y entonces se llama *apotema del tronco* a la altura de uno de los trapecios laterales.

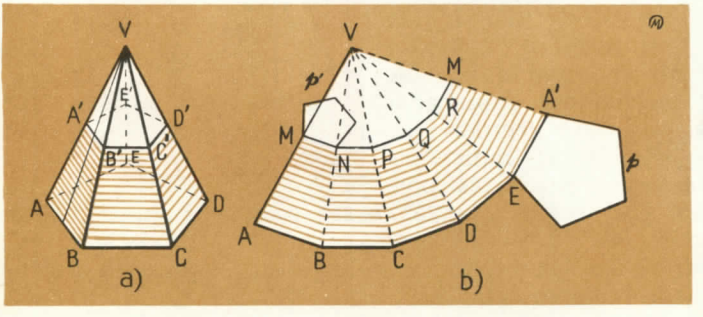




Las pesas de hierro fundido suelen tener forma de tronco de pirámide.

184. Desarrollo de la pirámide y del tronco de pirámide regular.—Tomemos una pirámide de cartón. Recortemos la base, y a continuación cortemos por la arista VA y extendamos la cartulina en un plano. Resulta el sector poligonal $VABCDEA'$, formado por triángulos isósceles.

Análogamente, para construir una pirámide de cartón se dibuja en la cartulina esta figura y se dobla por las líneas punteadas.



Del mismo modo, el *desarrollo del tronco* de pirámide es la figura $ABCDEA'M'RQPNM$ formada por trapecios isósceles.

185. Area lateral de la pirámide regular.—Si suponemos que la pirámide es de cartón, la cortamos por una arista lateral y la extendemos en un plano, aparecen n triángulos laterales iguales. El área de uno de ellos es, llamando b la base y a la apotema:

$$S' = \frac{a \cdot b}{2}$$

El área de los n triángulos valdrá:

$$S = \frac{abn}{2}$$

Pero $b \cdot n$ es el perímetro p de la base. Luego:

$$S = \frac{p \cdot a}{2}$$

El área lateral de una pirámide regular es igual a la mitad del producto del perímetro de la base por la apotema.

186. Area lateral del tronco de pirámide regular.—Procediendo del mismo modo que para la pirámide regular, se obtienen sobre un plano, como indica la figura, n trapecios iguales. El área de uno de ellos es:

$$S' = \frac{b + b'}{2} \cdot a$$

llamando b la base mayor, b' la base menor y a la apotema. El área de los n trapecios será:

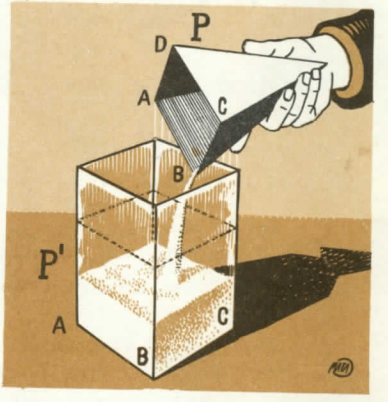
$$S = n \cdot \frac{b + b'}{2} \cdot a = \frac{b \cdot n + b' \cdot n}{2} \cdot a$$

Pero $b \cdot n$ es igual al perímetro p de la base mayor y $b \cdot n$ es igual al perímetro p' de la base menor. Luego:

$$S = \frac{p + p'}{2} \cdot a$$

El área lateral de un tronco de pirámide regular es igual a la semisuma de los perímetros de las bases por la apotema.

187. Volumen de la pirámide.—Construyamos de cartón una pirámide P y un prisma P' de igual base a igual altura, ambos abiertos por una base. Comprobaremos que en todos los casos es necesario verter tres veces la pirámide llena de arena fina para llenar el prisma. Luego el volumen de la pirámide es tres veces menor que el del prisma.



Por otra parte, según el número 180:

$$\text{Volumen } P' = B \cdot a.$$

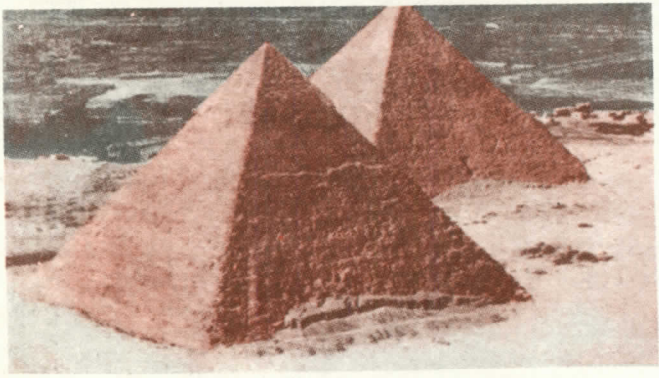
Luego:

$$\textbf{Volumen } P = \frac{B \cdot a}{3}$$

El volumen de una pirámide cualquiera es igual a un tercio del producto del área de su base por su altura.

EJEMPLO.—*Una de las grandes pirámides de Egipto tiene por base un cuadrado de 237 m de lado, y su altura mide 146 m.*

Hállese: 1.° *el peso de esta pirámide, suponiendo que la densidad de la piedra es 2;* 2.° *la longitud de la pared que pudiera*



construirse con esta piedra, dándole 2 m de altura y 0,45 m de espesor.

Area de la base: $237^2 = 56169$ m^2.

Volumen de la pirámide: $\frac{56169 \cdot 146}{3} = 2733558$ m^3.

Peso de la pirámide: $2733558 \cdot 2 = \mathbf{5467116}$ **t.**

Fórmula de la longitud = $V = a \cdot b \cdot c$; $\quad a = \frac{V}{b \cdot c}$.

Longitud de la pared: $a = \frac{2733558}{2 \cdot 0{,}45} = \mathbf{3037286{,}66}$ **m.**

EJERCICIOS

1. ¿Cómo son las aristas laterales de una pirámide regular? ¿Qué clase de triángulos son las caras laterales?

2. ¿Qué clase de trapecios son las caras laterales de un tronco de pirámide regular?

3. ¿Cuál es el área lateral de una pirámide triangular regular si el lado del triángulo tiene 10 m y la apotema de la pirámide 14,82 m?

4. Idem de una pirámide pentagonal regular, siendo 2,62 m el lado de la base y 8,25 dm la apotema de la pirámide.

5. Area total de una pirámide cuadrangular regular de 5,20 dm de lado de la base y 8,15 dm de apotema.

6. La altura de una pirámide es 4 m. La base es un triángulo que tiene 5 m de base por 4,20 m de altura. ¿Cuál es el volumen?

7. Halla el volumen de una pirámide de 9,60 m de alto, siendo 5 m^2 el área de la base.

8. La base de una pirámide es un trapecio cuyas bases miden 3,72 y 5,20 dm, respectivamente, y la altura 2,10 dm. La altura de la pirámide es 4,5 m. Halla el volumen.

9. Halla el volumen de una pirámide regular que tiene por base un cuadrado de 12,4 cm de lado, siendo la altura 24,5 cm.

10. Halla el volumen de la gran pirámide de Cheops, en Egipto, cuya base es un cuadrado de 230 m de lado, siendo la altura los $\frac{7}{10}$ de dicho lado.

11. ¿Cuál es el área de la base de una pirámide de 10,92 cm^3 y 7,2 cm de altura?

12. ¿Cuál es la altura de una pirámide cuyo volumen es 6,75 m^3 y el área de la base 15 m^2?

13. ¿Cuál es la altura de una pirámide de 40 dm^3 de volumen, siendo la base un trapecio cuya suma de las bases es 18 dm y 5 dm su altura?

14. ¿Cuánto pesa una pirámide cuadrada de granito de 23,8 dm de lado de la base y 46,18 m de altura? La densidad del granito es 2,75.

15. Un monolito piramidal de mármol (densidad 2,2) tiene por base un cuadrado de 20,34 m^2 y 25 m de altura. ¿Cuánto pesa?

16. Un obelisco está constituido por un paralelepípedo de base cuadrada de 1,3 m de lado y 7 m de altura, y por una pirámide de la misma base y 10,2 m de altura. Halla su volumen.

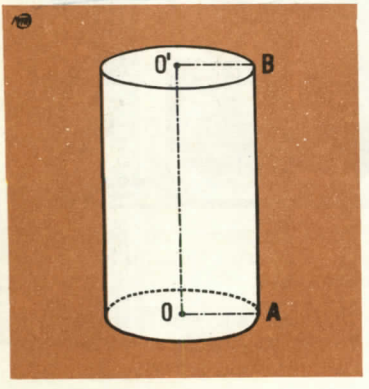
17. Las bases de un tronco de pirámide regular son dos pentágonos de 1,6 m y 0,8 m de lado. Calcula el área lateral, si la apotema mide 3 m.

29

El cilindro

188. El cilindro.—Un bidón de aceite, un tambor, un rodillo, un lápiz, una linterna, etc., tienen forma de *cilindro*.

Un cilindro está limitado por dos *bases*, que son dos círculos iguales y paralelos, y por una *superficie lateral*, denominada *superficie cilíndrica*, engendrada por un segmento AB al girar alrededor del eje OO' al cual es paralelo.



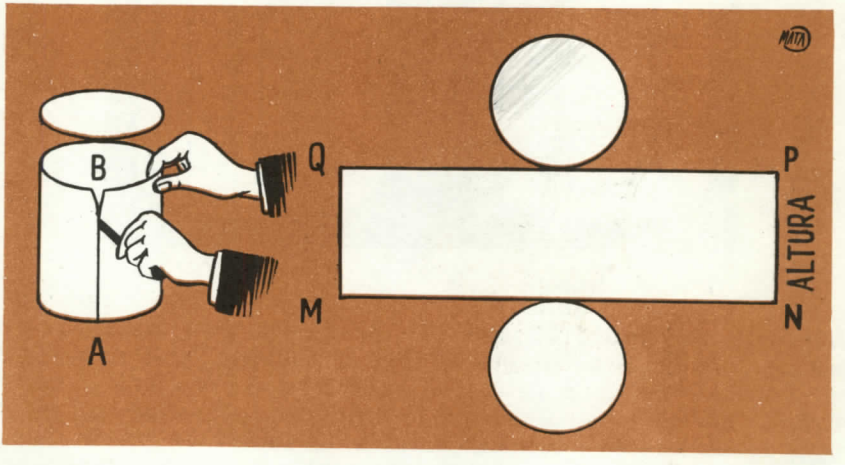
El cilindro puede considerarse como engendrado por el rectángulo $OO'BA$ al girar alrededor de OO'.

El eje OO' es *eje de simetría* del cilindro.

Generatriz es el lado AB del rectángulo opuesto al eje. Se le llama así porque al girar engendra la superficie lateral del cilindro.

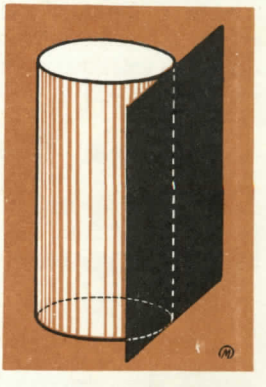
Las definiciones de *altura*, cilindro *recto* y cilindro *oblicuo*, con las mismas que en el prisma.

189. Desarrollo del cilindro.—Si después de separar las bases, cortamos la superficie cilíndrica a lo largo de una generatriz, la abrimos y la extendemos sobre un plano, obtendremos un rectángulo, cuya base es la longitud de la circunferencia de la base del cilindro, y la altura es su generatriz.



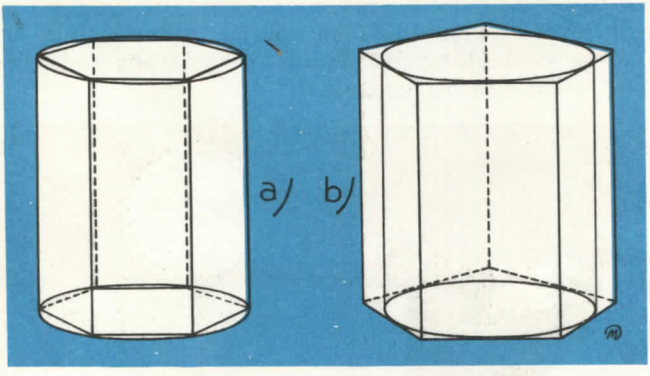
Recíprocamente, dibujando esta figura en cartulina, recortándola y uniendo los bordes podemos construir un cilindro.

190. Plano tangente a un cilindro.—Tracemos una recta tangente a la circunferencia básica de un cilindro, y en seguida la generatriz que pasa por el punto de contacto. El plano determinado por estas dos rectas contiene una generatriz del cilindro, y no corta en ningún otro punto a la superficie de éste. Se le llama *plano tangente* al cilindro.



191. Prisma inscrito y circunscrito al cilindro.—Dividamos en seis partes iguales la circunferencia básica de un cilindro, y unamos los puntos de división. Así obtenemos un exágono regular, que se dice *inscrito* en la circunferencia. Tracemos las generatrices correspondientes a los vértices, y unamos también entre sí los puntos en que ellas corten a la otra base.

Así obtenemos un prisma cuyas aristas laterales son generatrices del cilindro, y cuyas bases están inscritas en las bases del cilindro. Se le llama *prisma inscrito* en el cilindro.



Si por los seis puntos de división obtenidos como antes en la circunferencia básica, trazamos las tangentes a la misma, obtenemos un exágono regular, que se dice circunscrito a la circunferencia. Trazando las generatrices de los puntos de contacto y completando la misma construcción en la otra base, obtenemos un prisma cuyas caras laterales son tangentes a la superficie lateral del cilindro y sus bases están circunscritas a las bases del cilindro.

Se le llama *prisma circunscrito* al cilindro.

Un prisma inscrito y otro circunscrito en un cilindro cuyo número de caras aumenta indefinidamente, tienden a confundirse entre sí y con el cilindro. Por eso éste puede considerarse como un prisma cuyo número de caras es muy grande.

192. Areas lateral y total del cilindro.—Si cortamos la superficie cilíndrica a lo largo de una generatriz, la abrimos y la extendemos sobre un plano, obtendremos un rectángulo cuya base es la longitud $2\pi r$ de la circunferencia de la base del cilindro, y la altura, su generatriz. Por tanto, el área lateral vale:

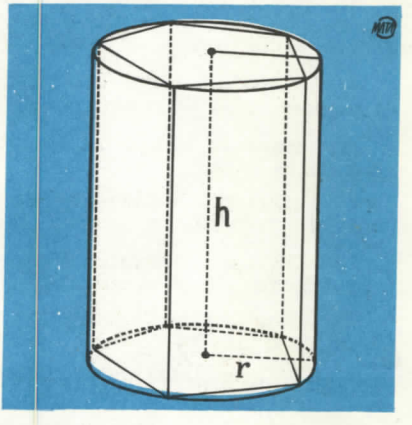
$$S = 2\pi rg$$

El área lateral de un cilindro de revolución es igual al producto de la longitud de la circunferencia de la base por la generatriz o altura.

Para hallar el área total se suma al área lateral el área de las dos bases:

$$S = 2\pi rg + 2\pi r^2 = 2\pi r\,(g + r)$$

193. Volumen del cilindro.—Veremos fácilmente que según lo dicho en el número 191, para hallar el volumen del cilindro bastará aplicar la fórmula del volumen del prisma.



Volumen del prisma $= B \cdot h$

Luego:

Volumen del cilindro $= \pi r^2 h$

siendo r el radio de la base y h la altura del cilindro.

El volumen del cilindro se obtiene multiplicando el área de su base por su altura.

EJEMPLO.—*La capacidad de un depósito cilíndrico es 300 Hl. ¿Cuál es su altura si el diámetro de la base es 3 m?*

Radio de la base en dm: $30 : 2 = 15$ dm.

Volumen del cilindro en dm^3: $300 \times 100 = 30000$.

Fórmula a aplicar: $V = \pi r^2 h$; $\quad h = \dfrac{V}{\pi r^2}$

La altura es: $30000 : (3{,}14 \times 15^2) = \mathbf{42{,}6}$ **dm.**

EJERCICIOS

1. El radio de la base de un cilindro mide 68 cm; la altura es el duplo del diámetro. Halla: 1.º, el área lateral; 2.º, el área total; 3.º, el volumen.

2. El radio de la base de un cilindro es 4; la altura, los $\frac{3}{2}$ de la circunferencia básica. Halla el área lateral y el volumen.

3. El diámetro de la base de un cilindro es 5 dm. Halla el área total, si la altura es doble de la circunferencia de la base.

4. Halla el volumen de un cilindro de 30,8 cm de circunferencia y 13 dm de altura.

5. Un cilindro cuya altura es 1,20 dm tiene por área de la base 6 dm^2. ¿Cuál es su volumen?

6. ¿Cuántos litros contiene un aljibe de forma cilíndrica de 4,80 m de alto y 3,92 m de diámetro?

7. El área total de un cilindro es 3 m^2; el radio de la base 0,20 m. ¿Cuál es la altura?

8. Se ha pintado, a razón de 6,50 pesetas el m^2, una cuba cilíndrica abierta de 1,8 m de diámetro y 4,90 m de profundidad. ¿Cuánto se deberá al pintor, si se pinta la cuba por dentro y por fuera?

9. Un rodillo tiene 1,60 m de longitud y 0,40 m de diámetro. ¿Cuál es su peso, si su densidad es 3,6?

10. Halla la altura de un cilindro de 5,4 m^3 de volumen y 7,5 m^2 de área de la base.

11. ¿Qué profundidad habrá de darse a un recipiente de forma cilíndrica de 7 m de radio para que pueda contener 3850 Hl de agua?

12. Un vaso cilíndrico tiene 0,6 dm de diámetro interior y 14 cm de profundidad. ¿Cuál es su capacidad?

13. ¿Cuál es el peso de una columna de mercurio (densidad, 13,6) de 20 cm de diámetro y 48 cm de altura?

14. El área total de un cilindro es 4,5 m^2; el radio de la base, 6 dm. ¿Qué volumen tiene?

15. ¿Qué área total tiene un cilindro cuya base mide 16 dm^2 y cuyo volumen es 78 dm^3?

16. El bombo de un barquillero tiene 0,70 m de ancho y 1,10 m de alto. ¿Qué superficie de hojalata se ha empleado en su construcción, sin contar la tapa?

17. La apisonadora de una carretera tiene un rodillo de 1,60 m de diámetro por 2,10 m de largo. ¿Qué superficie de tierra apisona en cada vuelta?

30

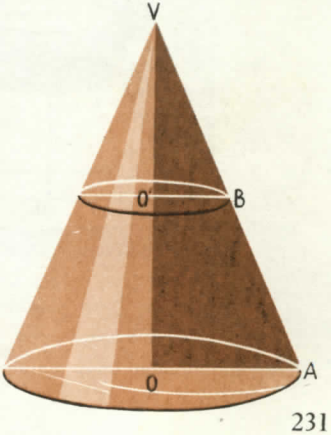
El cono

194. El cono.—El gorro de un payaso, el tejado de una torre cilíndrica, un colador, la punta de un lápiz, etc., tienen forma de *cono*.

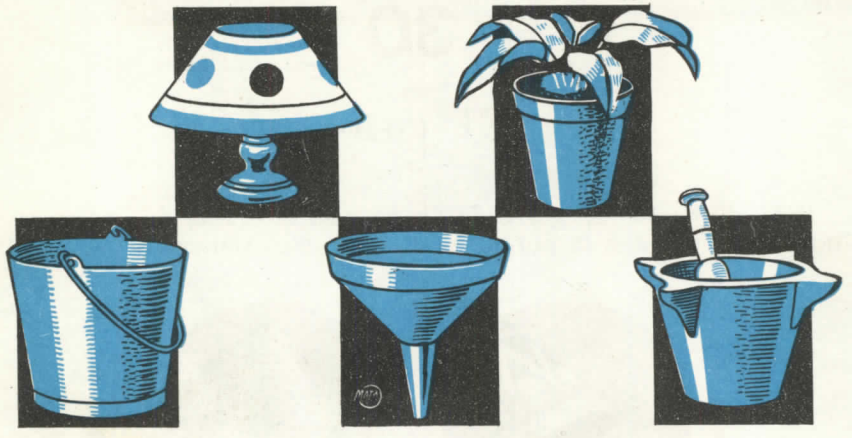
El cono está siempre limitado por una *base* que es un círculo, y una *superficie lateral*, denominada *superficie cónica*, engendrada por un segmento *VA* al girar alrededor del eje *VO*, al cual toca en el punto *V*. El cono puede considerarse como engendrado por el triángulo rectángulo *VOA* al girar alrededor de *VO*. Por eso se le llama *cono de revolución*.

El *eje o altura VO* es *eje de simetría* del cilindro.

Generatriz es la hipotenusa *VA* del triángulo generador. Se le llama así porque al girar engendra la superficie lateral del cilindro.

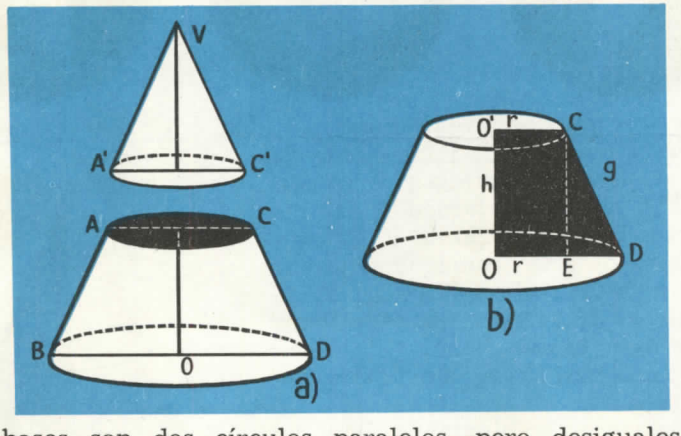


195. Tronco de cono de revolución.—Una pantalla, un embudo, un caldero, un tiesto, etc., tiene forma de *tronco de cono.*



El tronco de cono es la porción de cono comprendida entre la base y una sección paralela a ésta.

Se puede considerar engendrado por la rotación de un trapecio rectángulo *ODCO'* alrededor del eje o altura *OO'*; *CD* es la *generatriz* del tronco.

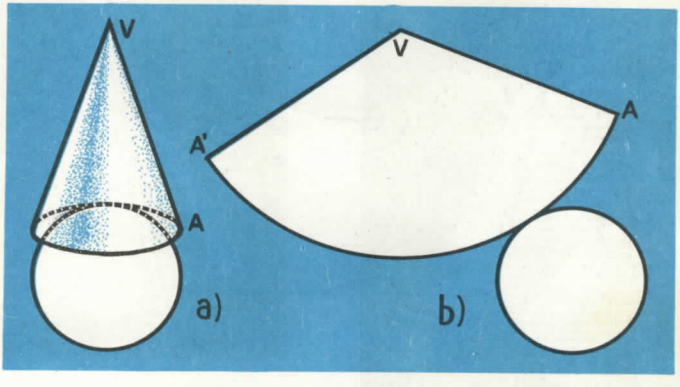


Las bases son dos círculos paralelos, pero desiguales.

La parte superior del cono truncado es el *cono deficiente.*

Altura del tronco es la distancia *OO'* entre los planos de sus bases. Coincide con el *eje de simetría* del tronco.

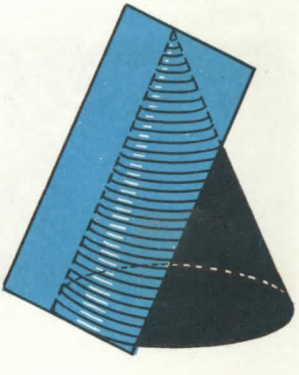
196. Desarrollo del cono.—Cortando la superficie lateral de un cono a lo largo de una generatriz, después de separar la base, y extendiéndola sobre un plano, aparece un sector circular cuyo radio es la generatriz del cono, y cuyo arco no es sino la circunferencia básica del cono.



Al revés, dibujando en cartón la figura de la derecha podemos construir el cono.

197. Plano tangente a un cono.—Es aquel que contiene una generatriz del cono y no corta a la superficie de éste en ningún otro punto.

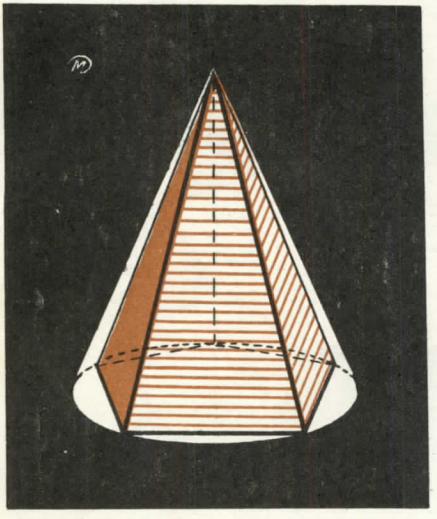
Cualquier plano que pasa por una tangente a la base de un cono y por la generatriz del punto de contacto es tangente al cono.

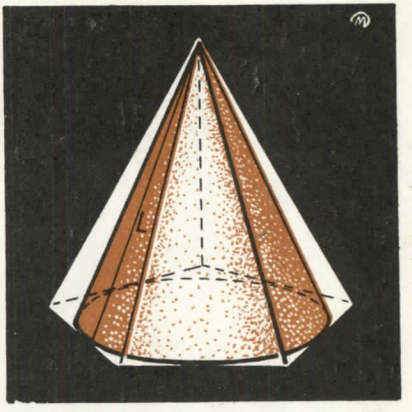


198. Pirámide inscrita y circunscrita a un cono.—Una pirámide está *inscrita* en un cono cuando sus aristas laterales son generatrices del cono y su base está inscrita en la base del cono.

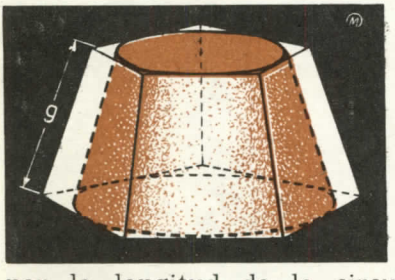
Una pirámide está *circunscrita* a un cono cuando las caras laterales de la pirámide son tangentes a la superficie lateral del cono, y su base está circunscrita a la base del cono. El cono puede considerarse como caso particular de pirámide, cuyo número de caras laterales es muy grande. Análogamente construi-

ríamos un *tronco de pirámide inscrito* o *circunscrito* a un tronco de cono.





199. Area lateral y volumen de un cono de revolución.—Según el razonamiento del número anterior es lícito asegurar que un cono puede considerarse como una pirámide regular inscrita en que el número de caras laterales es muy grande.



Luego las fórmulas del área lateral y volumen de la pirámide pueden hacerse extensivas al cono; la apotema de la pirámide se reemplaza por la generatriz del cono y el perímetro de la base por la longitud de la circunferencia básica. Por tanto, el área lateral del cono vale:

$$S = \frac{p \cdot g}{2} = \frac{2\pi r g}{2} = \pi r g$$

El área lateral de un cono de revolución es igual a la mitad del producto de su generatriz por la circunferencia de la base.

El volumen se deduce igualmente del de la pirámide:

$$V = \frac{B \cdot h}{3} = \frac{\pi r^2 h}{3}$$

El volumen de un cono de revolución es igual al tercio del producto del área de la base por la altura.

200. Area lateral del tronco de cono.—Un tronco de cono puede considerarse como un tronco de pirámide en que el número de caras laterales ha crecido indefinidamente. Luego:

$$S = \frac{p + p'}{2} \cdot g = \frac{2\pi r + 2\pi r'}{2} g = \pi(r + r')g$$

EJERCICIOS

1. La generatriz de un cono mide 4,75 dm y el radio de la base 3,78 dm. ¿Cuáles son las áreas lateral y total?

2. El radio de la base de un cono es 0,4 m y su altura 2,6 m. ¿Cuál es su volumen?

3. Un cono tiene su generatriz de doble longitud que el diámetro de la base, cuyo radio mide 53 cm. ¿Cuál es el área lateral y el área total?

4. El área lateral de un cono es 94,20 dm^2 y su lado o generatriz 6 dm. Halla el radio de la base y el área total.

5. Un cono cortado por un plano que pasa por el eje tiene por sección un triángulo equilátero de 1,80 m de lado. Halla el área total del cono.

6. La circunferencia de la base de un cono mide 13,86 m; la altura, 5,25 m. ¿Cuál es su volumen?

7. El radio de la base de un cono es 24 cm; la generatriz vale los 5/4 de la circunferencia de la base. ¿Cuál es el área lateral?

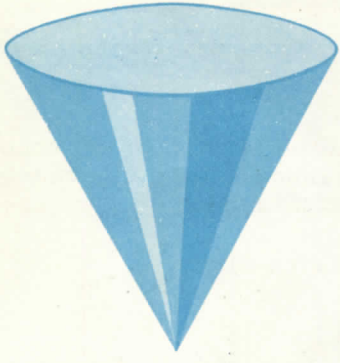
8. ¿Cuánto pesa el tejado de cinc de una torre que remata en un cono de 3 m de generatriz y 2,70 m de diámetro si el cinc tiene 1 mm de espesor y una densidad de 6,86?

9. La base de un cono mide 42 cm de diámetro y el área total es de 2 m^3. ¿Cuál es su generatriz?

10. ¿Cuánto se pagará por recubrir de cinc un tejado cónico de 3,60 m de diámetro de la base y cuya generatriz mide 5,70 m, a razón de 26,50 pesetas el m^2?

11. Un depósito cónico tiene 2 m de altura y 9,42 m de circunferencia de la base. ¿Cuál es su capacidad en Hl?

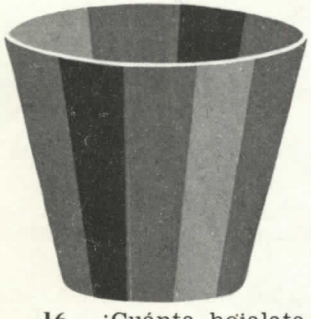
12. Un cono de plata (densidad, 10,47) pesa 2,50 kg. Si el radio de la base mide 7,5 cm, halla su altura.

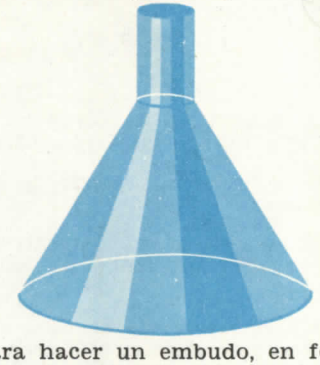


13. Halla el área total de un tronco de cono, sabiendo que el radio de la base mayor es igual a 2,5 mm, el de la menor 1,7 mm y la generatriz 3,2 mm.

14. El área lateral de un tronco de cono es 34,54 dm^2; los radios de sus bases, 1,42 dm y 0,64 dm. Halla su generatriz.

15. ¿Qué superficie de hierro galvanizado se necesita para construir un caldero de forma de tronco de cono, si el diámetro de la base superior mide 3,6 dm y el de la base inferior 2,4 dm y la generatriz 4,3 dm?





16. ¿Cuánta hojalata se precisa para hacer un embudo, en forma de tronco de cono, de generatriz 16 cm y de diámetro en las bases 12,5 y 2,5 cm, respectivamente, si el vástago cilíndrico es de 5 cm de largo?

17. Una torre circular de 2,4 m de radio y 20 m de altura ha de terminar en una cúpula cónica, cuya área lateral sea 1/10 de la de dicha torre. Halla la generatriz de la cúpula.

18. Una tienda de campaña de forma cónica tiene 1,8 m de radio y 3,4 m de generatriz. ¿Qué superficie de lona hace falta para construirla?

31

La esfera

201. La esfera.—Un globo, un balón, una naranja, son ejemplos de *esferas*.

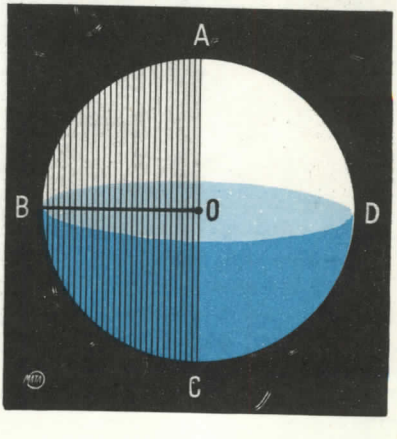
Todos los puntos de la superficie de la esfera equidistan de uno interior llamado *centro*.

Radio es cualquier segmento que une el centro con un punto de la superficie esférica, como *OA*. Todos los radios de una esfera son iguales.

Diámetro es cualquier segmento que pasando por el centro tiene sus extremos en la superficie esférica, como *AC*.

El diámetro equivale a dos radios.

La esfera puede considerarse como el cuerpo engendrado por la



rotación completa de un semicírculo *ABC* alrededor de su diámetro. La superficie esférica está entonces engendrada por la semicircunferencia *ABC* al girar alrededor de su diámetro *AC*.

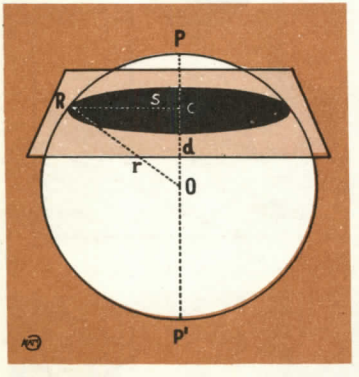
202. Secciones planas en la esfera.—Hagamos una esfera con plastilina, arcilla moldeable o masilla, y a continuación demos en ella un corte o *sección plana,* esto es, por un plano. Veremos que en todos los casos *la sección es un círculo,* cuyo centro *C* está en el diámetro perpendicular al plano de la sección.

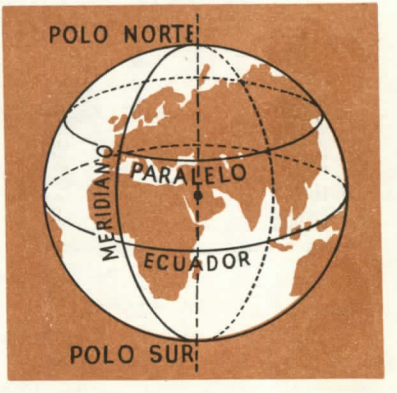
Dicho diámetro *PP'* se denomina *eje* del círculo sección, y sus extremos *P* y *P'* se llaman *polos* de dicho círculo.

Si la sección pasa por el centro de la esfera, el círculo obtenido se denomina *círculo máximo,* porque es el mayor posible.

En caso contrario se llama *círculo menor.*

Hemisferios es cada una de las dos mitades en que queda dividida la esfera por un círculo máximo.

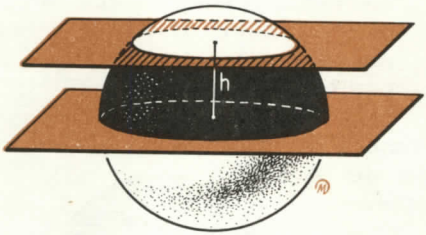




203. Los círculos en la esfera terrestre.—La Tierra es muy aproximadamente una esfera, algo achatada por los *Polos Norte* y *Sur,* que son los extremos de un eje, llamado *eje de la Tierra,* alrededor del cual gira la Tierra en su movimiento de rotación. La circunferencia máxima perpendicular al eje es el *Ecuador,* y las circunferencias máximas que pasan por los dos Polos son los *meridianos.* Las circunferencias menores paralelas al Ecuador son los *paralelos.*

204. Zona esférica y segmento esférico.—Construyamos una esfera con arcilla moldeable, y con un cuchillo demos dos cortes o secciones paralelas. La parte de esfera comprendida entre los dos planos se llama *segmento esférico de dos bases,* o simplemente *rebanada esférica.*

La parte correspondiente de superficie esférica es la *zona esférica.*

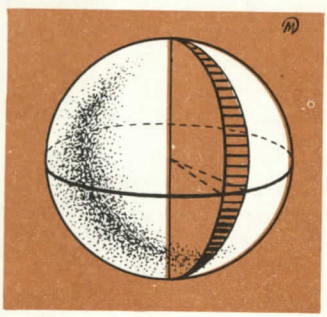


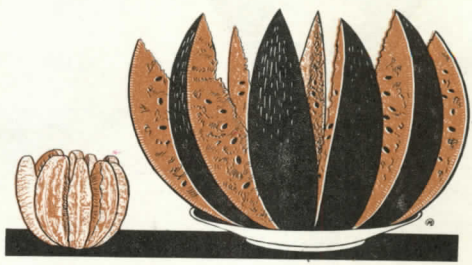
Cada uno de los dos trozos no comprendidos entre los dos planos se llama *segmento esférico de una base,* y la superficie esférica correspondiente es un *casquete esférico.*

La parte que flota sobre el agua de un balón o de una bola de madera son ejemplos de este último caso.

205. Huso esférico y cuña esférica.—En la misma esfera construida de madera demos dos cortes que pasen por el centro.

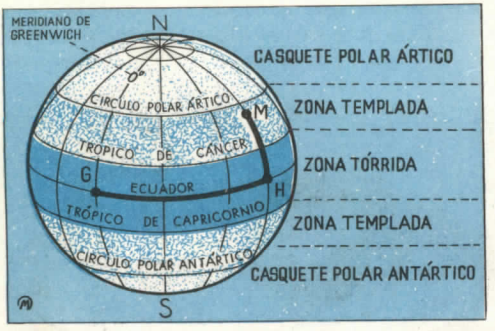
Separamos así un cuerpo denominado *cuña esférica.* La parte de superficie esférica correspondiente se llama *huso esférico.*





Dan idea de una cuña esférica una raja de sandía o un gajo de naranja; y su cáscara da idea del huso esférico.

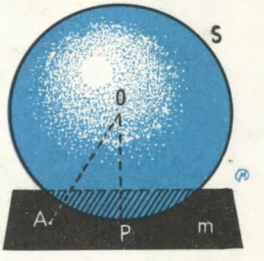
206. Aplicación a la esfera terrestre.—En el Curso de Geografía se definen: zona *templada* o *tórrida, casquete polar, husos horarios,* etc. Explica todo esto en la figura.



207. Tangencia.—Coloquemos una esfera sobre la mesa. El plano de ésta solamente toca a la esfera en un punto. Un plano tal se llama *plano tangente* a la esfera, y el punto común se conoce con el nombre de *punto de contacto.*

Situemos con una aguja la posición del radio que va al punto de contacto. Veremos que es perpendicular al plano de la mesa.

El plano tangente a una esfera es perpendicular al radio que pasa por el punto de contacto.



Una superficie esférica está *inscrita en un poliedro* si es tangente a todas las caras del mismo. En este caso el poliedro está circunscrito a la superficie esférica.

Una superficie esférica está *inscrita a un cono* o a un *cilindro,* cuando es tangente a todas las generatrices de los mismos, o sea, toca a cada una en un solo punto, llamado *punto de contacto.* Los puntos de contacto forman un círculo menor de la esfera para el cono y un círculo máximo para el cilindro.

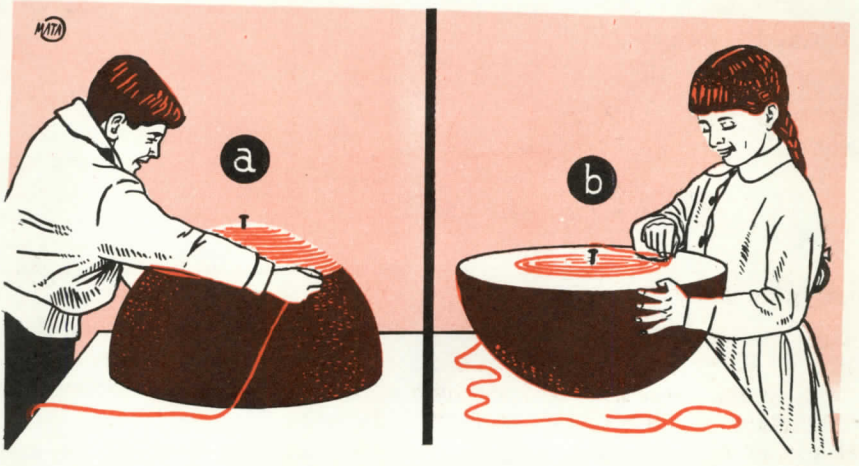
208. Area y volumen de la esfera.

El área de la superficie esférica es igual a cuatro círculos máximos:

$$S = 4\pi r^2$$

Para comprobarlo tomemos una media esfera y arrollemos un cordel alrededor de un clavo que colocamos en el polo, hasta que

toda la media esfera quede cubierta (Fig. *a*). Separemos lo que resta de cuerda. La parte de cordel empleada en cubrir el hemisferio arrollémosla ahora sobre el círculo máximo (Fig. *b*). Comproba-

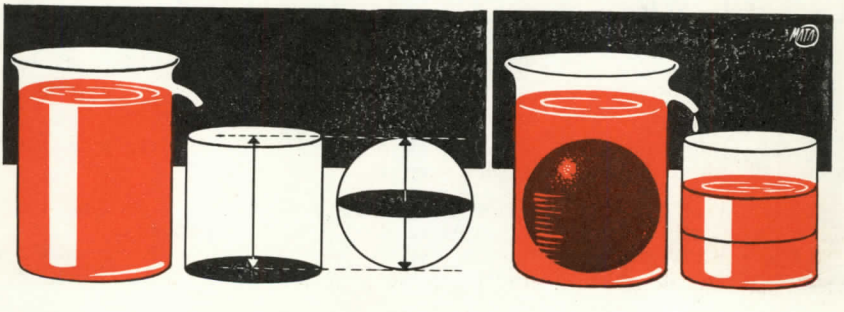


remos que sobrará la mitad de la cuerda. La superficie del hemisferio es doble de la del círculo máximo y, por tanto, la superficie esférica completa es igual a la de cuatro círculos máximos.

El volumen de la esfera es igual al tercio del producto del área de la superficie esférica por el radio:

$$V = 4\pi \cdot r^2 \times \frac{r}{3} = \frac{4}{3}\pi r^3$$

En efecto, llenemos de agua un vaso como el de la figura, justo



hasta el orificio de salida. Introduzcamos en él una esfera, y hagamos que el agua desplazada vaya cayendo en un vaso cilíndrico que tiene el mismo diámetro de la base y la misma altura que la esfera. Comprobaremos que este vaso se llena hasta los 2/3 de su altura. El volumen del cilindro es $\pi r^2 \cdot 2r = 2\pi r^3$. Y el de la esfera:

$$V = \frac{2}{3} \cdot 2\pi r^3 = \frac{4}{3} \pi r^3$$

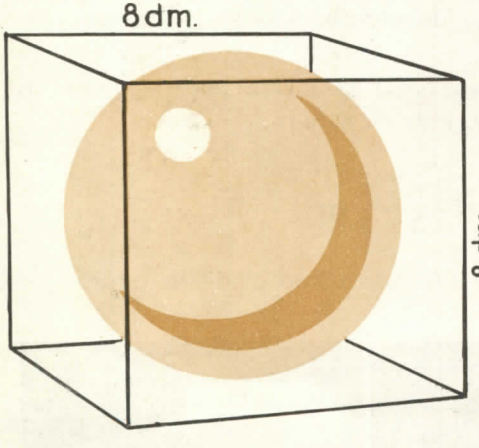
EJERCICIOS

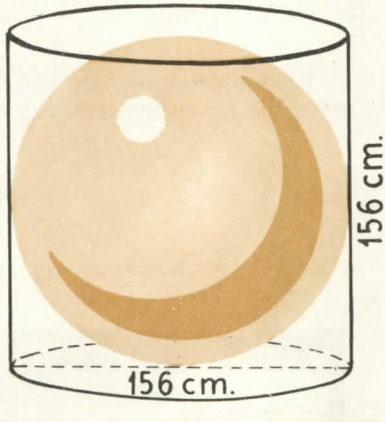
1. Halla el volumen y el área de una esfera de 1 m de radio. Idem de 0,80 m de diámetro.

2. Halla el volumen y el área de una esfera cuya circunferencia máxima mide 47,10 dm.

3. ¿Cuánto pesa el aire contenido en un balón de forma esférica cuyo radio es 2 m, si el litro de aire pesa 1,293 g?

4. Halla el volumen comprendido entre un cubo de 8 dm de arista y una esfera inscrita en él (tangente a las 6 caras).





5. Lo mismo entre un cilindro, cuyo diámetro de la base y su altura valen 156 cm, y la esfera inscrita en él.

6. ¿Cuál es el área interior y exterior y el volumen de una esfera hueca de 35 mm de espesor y 1,05 m de diámetro exterior?

7. Calcula en km² el área de la superficie terrestre, supuesta la Tierra esférica, y su radio 6370 km.

8. Halla la longitud de la circunferencia máxima de una esfera que tiene de área $16 \cdot 3{,}14$ $(16\ \pi)$ cm^2. Idem el volumen de la esfera.

9. Una caldera de forma cilíndrica termina en cada uno de sus extremos en una semiesfera de 40 cm de radio. Halla en litros la capacidad de esta caldera, si la longitud del cilindro es el doble que el diámetro.

10. ¿Cuánta tela se necesita para hacer un globo esférico de 3,50 m de radio?

11. Halla el radio de una esfera cuyo volumen es $36\ \pi$ dm^3. Idem el área.

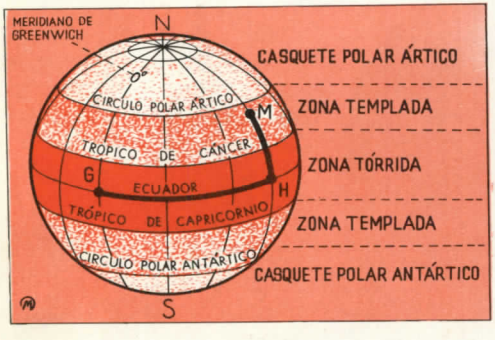
12. La cúpula semiesférica de una catedral tiene 26 m de diámetro. ¿Cuánto costará pintarla a razón de 5 pesetas el m^2?

13. Halla en km^2 la superficie de la esfera terrestre, sabiendo que un meridiano mide 40000 km.

32

Movimientos de la Tierra y medida del tiempo

209. Coordenadas geográficas.—Hemos dicho (núm. 203) que la forma de la Tierra es sensiblemente esférica. Se le puede asimilar con mucha aproximación a una esfera cuya circunferencia máxima tiene 40.000 km, y, por tanto, cuyo radio es de unos 6.366 kilómetros.



Para localizar la posición de un punto (ciudad, montaña, etc.), sobre la esfera terrestre, se escoge un meridiano origen, que es el que pasa por el Observatorio Astronómico de Greenwich, en Inglaterra, y que casi coincide con el de Barcelona. El semimeridiano de Greenwich corta al Ecuador en *G*. Sea *M* un punto de la Tierra; el semimeridiano *NMS* corta al Ecuador en *H*. La graduación del arco *GH* se denomina *longitud* del punto *M*. Se determina su posición con relación al meridiano origen, indicando si está al Este o al Oeste del mismo.

La graduación del arco *HM* mide la *latitud* de *M*. Se precisa su posición indicando si está al Norte o al Sur del Ecuador.

La longitud y la latitud de un lugar son sus *coordenadas geográficas*.

210. Movimiento de rotación de la Tierra.—Muy diversas experiencias demuestran que la Tierra da una vuelta completa alrededor de su eje *NS* en 24 horas, a lo que se llama **movimiento de rotación.** Sin necesidad de acudir a las afirmaciones de los astronautas, fijémonos una noche bien clara en las estrellas, especial-

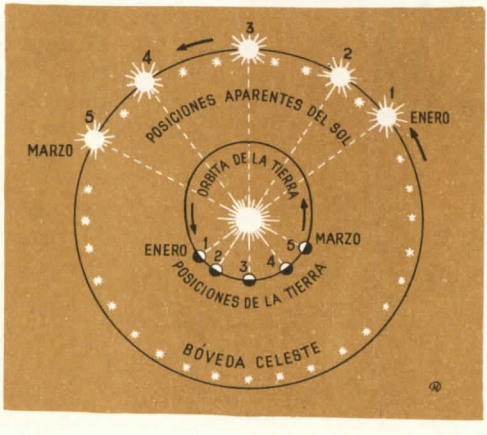
mente en una que esté próxima a la estrella Polar, y observemos su posición en el cielo a lo largo de la noche. Veremos que dicha posición va variando, y que hay estrellas que siempre permanecen por encima del horizonte, describiendo con movimiento uniforme pequeños círculos en la esfera celeste. Notaremos con sorpresa que todas las estrellas describen círculos con los mismos polos P y P' y exactamente en el mismo tiempo, un *día sidéreo*, unos 4 minutos más corto que el día solar o civil.

Vemos que todas las estrellas se mueven como si estuvieran fijas invariablemente a una esfera que girara con movimiento uniforme alrededor del diámetro PP', que no es más que la prolongación del eje de la Tierra. Este movimiento de las estrellas se ha denominado **movimiento diurno**, porque dura un día. El movimiento diurno no puede explicarse si no es por el movimiento de rotación de la Tierra. Es ésta la que, aislada en el espacio, gira alrededor de su eje, justamente en un día sidéreo, pero en sentido directo (contrario a las agujas del reloj), produciéndonos la impresión de que es la esfera celeste la que gira en sentido retrógrado.

211. Movimiento de traslación de la Tierra.—Así como las estrellas están fijas a la esfera celeste, el Sol, la Luna, los planetas, etcétera, tienen un movimiento propio sobre la misma. Contrariamente a las estrellas, el Sol no tiene el orto y el ocaso en el mismo punto del horizonte todos los días. No tiene tampoco, como las estrellas, una posición constante en la esfera celeste, sino que cada día se retrasa unos cuatro minutos respecto a las estrellas. Esto hace que dé una vuelta completa a la esfera celeste exacta-

mente en un año, en sentido inverso al del movimiento diurno. Su ruta está determinada por las 12 constelaciones siguientes: Aries, Toro, Gemelos, Cáncer, León, Virgen, Balanza, Escorpión, Saetero, Capricornio, Acuario y Peces.

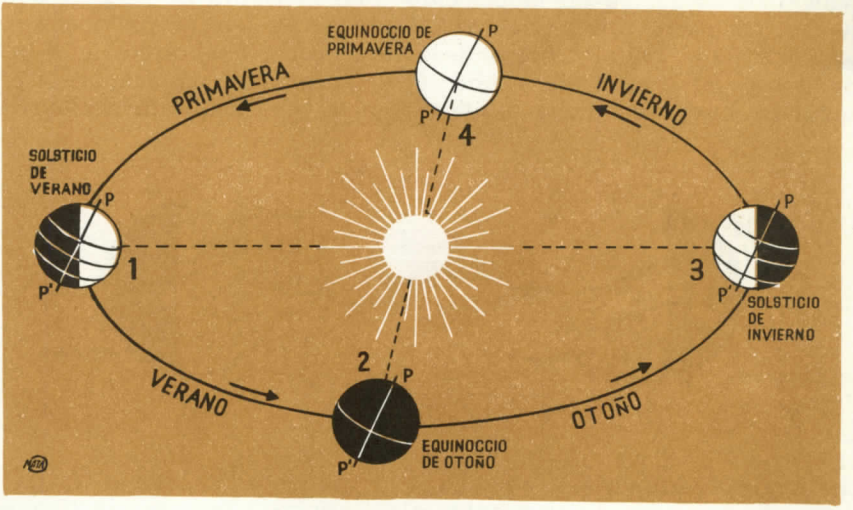
El movimiento aparente del Sol en la esfera celeste no es sino una consecuencia del movimiento de la Tierra alrededor del Sol. Es ésta la que en el término de un año describe una órbita elíptica, casi circular, alrededor del Astro Rey, a lo que se denomina movimiento de *traslación* de la Tierra.



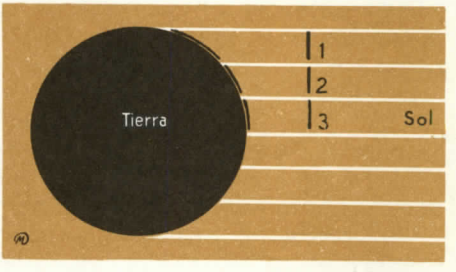
Esto hace que el Sol se nos proyecte cada día en sitio distinto sobre la bóveda celeste, aparentando describir en la misma una circunferencia máxima en el término de un año.

212. Consecuencias del movimiento de traslación.—Son dos principalmente: las estaciones y la desigualdad de duración de los días y de las noches.

1.° En su movimiento de traslación, la Tierra se mueve en el plano de la eclíptica, y su eje, inclinado 23° 27′ respecto a la normal a dicho plano, se conserva siempre paralelo a sí mismo. Por



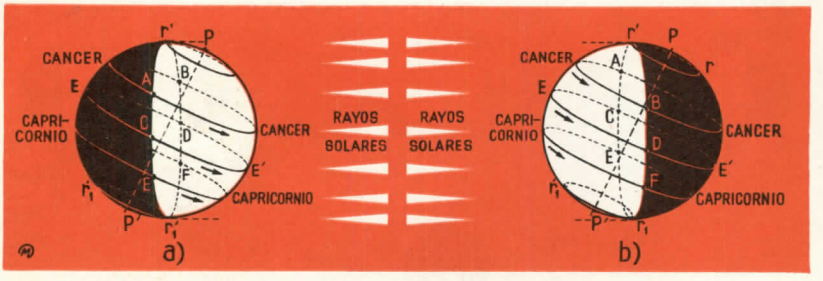
tanto, en la posición 1 el Sol da verticalmente sobre el trópico de Cáncer, en el hemisferio Norte; es el comienzo del *verano* para dicho hemisferio. En la posición 2 el Sol cae verticalmente sobre el Ecuador; los dos hemisferios están igualmente calentados por el Sol; es el comienzo del *otoño*. En la posición 3 el Sol da verticalmente sobre el trópico de Capricornio, y en cambio sus rayos caen muy inclinados sobre el hemisferio Norte; es el comienzo del *invierno* para el mismo. Finalmente, en la posición 4 el Sol vuelve a caer normalmente sobre el Ecuador; es el inicio de la *primavera*.



La figura muestra cómo el calor producido por el Sol sobre la Tierra depende de la inclinación con que sus rayos caen sobre la misma. Los tres haces de luz solar, 1, 2, y 3, llevan la misma can-

tidad de energía calorífica, pero el primero se distribuye en una extensión muy grande, mientras el tercero en una superficie mucho más pequeña. Es, por tanto, evidente que a cada punto del primer caso le corresponderá menor cantidad de energía que en el segundo.

2.° *Desigualdad de duración de los días y de las noches.*—Supongamos la Tierra en la posición 1 de la figura de la página anterior. La parte sombreada es la que se encuentra de noche. Un punto situado en el trópico de Cáncer recorre el arco de *A* a *B* de día y de *B* a *A* de noche. Pero el primero es mayor que el segundo. Luego en dicho punto el día es mayor que la noche. Esta



desigualdad aumenta a medida que aumenta la latitud, hasta el punto de que en todo el círculo polar ártico el día dura las 24 horas. El Sol no se pone. En el polo *P* el día dura 6 meses (figura *a*). Lo contrario sucede en el solsticio de invierno (posición 3). El punto situado en el trópico de Cáncer recorre el arco de *A* a *B* de día, y de *B* a *A* de noche, siendo el primero menor que el segundo. Luego entonces el día es más corto que la noche. En el círculo polar ártico la noche dura las 24 horas, y en el polo *P*, 6 meses (figura *b*).

213. Medida del tiempo.—Se hace por medio de los *relojes*, gracias al isomorfismo que existe entre los tiempos transcurridos a partir de cierta posición del minutero de un reloj y los ángulos que dicho minutero va formando con su posición primitiva.

Merced a un mecanismo especial, las manecillas del reloj giran siempre el mismo ángulo en cada unidad de tiempo. Así, el *tiempo se mide por el ángulo girado.* ¿Qué ángulo recorre cada una de las agujas en una hora? ¿En un minuto?

La unidad natural de tiempo es el *día solar,* o tiempo que tarda el Sol en su movimiento aparente en dar una vuelta alrededor de la Tierra. Ya que los días solares no son todos exactamente

iguales a lo largo del año se ha tomado como unidad de tiempo el *día solar medio*, o promedio de todos los días del año. Este día solar medio se divide en 24 partes iguales que se llaman *horas*, la hora en 60 *minutos* y el minuto en 60 *segundos*.

Otras unidades de tiempo son: el *año solar*, o tiempo que tarda la Tierra, en su movimiento de *traslación*, en dar una vuelta completa alrededor del Sol; el *siglo*, igual a 100 años; el *lustro*, igual a 5 años. El año solar tiene 365,24 días. En la práctica, para no emplear fracciones de día se ha establecido el *año civil*, que tiene 365 días exactos. Pero para compensar el error de un cuarto de día menos que tiene cada año, se añade un día cada cuatro años, resultando así los años *bisiestos* con 366 días. Julio César estableció que fueran bisiestos todos los años múltiplos de 4, como 1964, 1968, etc. Ahora bien, de este modo resultaba que cada 4 siglos se añadían 3 días de más, por lo cual el Papa Gregorio VII ordenó que no fueran bisiestos los años que tienen número exacto de centenas, excepto cuando dicho número de centenas es múltiplo de 4. Así no fueron bisiestos el 1700, 1800 y 1900, pero sí lo será el 2000.

El año se divide en 12 meses. En la figura situamos sobre los nudillos los meses de 31 días; entre los nudillos los restantes meses.

¿Cuántos días tiene julio? ¿Y febrero?

214. Operaciones con unidades de tiempo.—Las mismas reglas y principios dados para las operaciones con las unidades angulares (números 132 a 135), valen para las operaciones con unidades de tiempo. Daremos aquí solamente algunas transformaciones con dichas unidades, que valen también para las angulares.

215. Transformación 1.ª—*Convierte un número incomplejo en otro de orden inferior.*

Sea expresar 15 horas en segundos.

Como cada hora tiene 3600 segundos, las 15 h tendrán:

$$15 \times 3600 = \mathbf{54000\ segundos}$$

216. Transformación 2.ª—*Convierte un número complejo en unidades del orden inferior.*

Sea expresar en segundos el tiempo: 15 h 11 min 57 s.

Puede formarse el cuadro siguiente:

15 h	= 3600 s	× 15 =	54000 s
11 min	= 60 s	× 11 =	660 s
57 s	———	=	57 s
55 h 11 min 57 s		=	**54717 s**

217. Transformación 3.ª—*Expresa en forma compleja un número que represente unidades del orden inferior.*

Sea convertir 84689 s en horas, minutos y segundos.

Para saber cuántos minutos hay en 84689 s, se divide por 60, y se obtiene 1411 mn de cociente y 29 s de resto. Del mismo modo se procede para hallar cuántas horas hay en 1411 min. Los cálculos se disponen del siguiente modo:

84689 s	60	
246	1411 mn	60
68	211	23 h
89		
Resto: 29 s	31 mn	

Al dividir 84689 por 60, resulta:

84689 s = 1411 mn 29 s

Al dividir luego 1411 por 60, se obtiene:

1411 mn = 23 h 31 mn

Luego:

84689 s = **23 h 31 mn 29 s**

218. Transformación 4.ª—*Expresa en forma compleja una fracción de la unidad superior.*

Sea calcular el tiempo que emplea un avión para ir de Madrid

a París (2200 km) con la velocidad media de 180 km por hora. El tiempo empleado en este recorrido es:

$$\frac{2200}{180} \text{ de hora, ó } \frac{110}{9} \text{ de hora}$$

Para convertir esta fracción de hora en complejo de horas, minutos y segundos, se efectúan las divisiones sucesivas, teniendo cuidado de convertir cada resto en unidades del orden inmediatamente inferior.

110 h	9
20	12 h
Resto: 2 h	
× 60	
120 mn	

120 mn	9
30	13 mn
Resto: 3 mn	
× 60	
180 s	

180 s	9
	20 s

El tiempo pedido es: **12 h 13 mn 20 s.**

EJERCICIOS

1. ¿Cuántos días transcurren desde el 16 de marzo al 5 de mayo?

2. Estamos a 2 de mayo. ¿Qué fecha será dentro de 89 días?

3. Un señor nació el 15 de septiembre de 1903. Vivió 48 años y 56 días. ¿Qué día murió?

4. Un reloj retrasa 2 minutos cada día. Se le pone en hora un domingo a mediodía. ¿Qué hora marcará a medianoche del miércoles siguiente?

5. ¿Cuántos días transcurren desde el 17 de abril al 25 de julio?

6. Un tren sale de Madrid a las 8 h 15 mn de la mañana, y llega a Zaragoza a las 4 h 25 mn de la tarde. ¿Cuánto dura el recorrido?

7. Un obrero emplea 2 h 15 mn para hacer un metro de obra. ¿Qué tiempo necesitará para hacer: 1.º, 8,25 m; 2.º, 5/12 de m?

8. Una fuente da 28 litros por minuto. ¿Cuánto dará en 12 h 18 mn 5 segundos?

9. Calcula el camino recorrido por un auto, a razón de 36 km por hora, en 3 h 40 mn 30 s.

10. Un reloj retrasa 3 mn 20 s por día. ¿Cuánto retrasará en $6\frac{1}{2}$ días?

11. Halla el arco recorrido por la aguja larga de un reloj en 27 mn 13 segundos.

12. Un ciclista ha dado 5 vueltas a una pista en 32 mn 30 s. ¿Cuánto tiempo emplea en dar una vuelta?

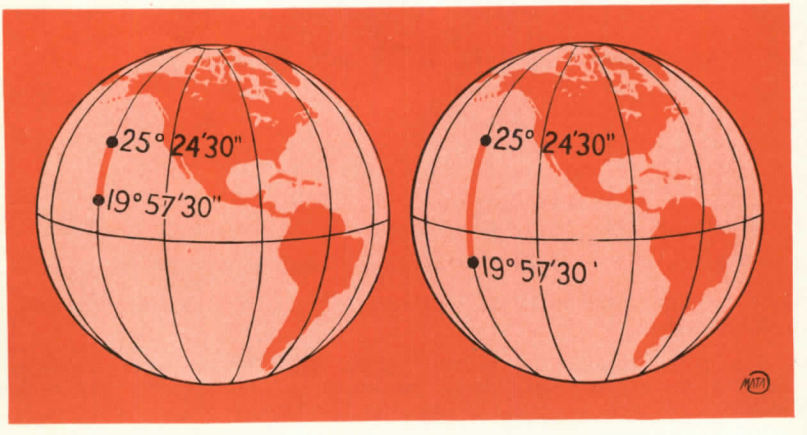
13. Un peatón da 110 pasos de 0,75 m por minuto. ¿Qué tiempo empleará para recorrer 13,970 km?

14. Un barco sale de La Coruña para Nueva York el 30 de agosto a las diez de la mañana. La duración del viaje es 131 h 35 mn. ¿A qué hora y en qué día llega a su destino?

15. Halla en km la distancia de dos ciudades situadas en un mismo meridiano, si su diferencia de latitud es: 27°; 38° 24′; 95° 42′; 7° 33′ 20″.

Indicación.—Un arco de meridiano de 360° mide 40 000 km.

16. Dos islas están en el mismo meridiano. Sus latitudes son: 25° 24′ 30″ y 19° 57′ 30″. Calcula en km la distancia entre dichas islas: 1.° Cuando están en hemisferios diferentes. 2.° Cuando están en el mismo hemisferio.



17. Dos ciudades situadas en el mismo meridiano distan entre sí 1500 km. ¿Cuántos grados, minutos y segundos de arco de meridiano hay entre las dos ciudades?

18. ¿Cuántos segundos tiene el mes lunar que vale 29 días 12 horas 44 minutos 3 segundos?

19. Un tren que recorre 50 km por hora por término medio, sale de Madrid a las 8 h y 30 mn. ¿A qué hora llegará a Vitoria? (492 km.)

20. Una máquina cose por minuto 1,40 m. ¿Qué longitud coserá en 4 horas 15 minutos?

21. Un automóvil recorrió 300 km desde la 1 de la tarde hasta las 7 h 25 mn de la misma. ¿Qué hora era al pasar frente al km 180?

22. Dos personas andan en 1 hora 7 km y 5,5 km, respectivamente.

Si salieron al mismo tiempo, del mismo sitio y en la misma dirección, ¿a qué distancia se encontrarán al cabo de 3 horas 28 minutos?

23. ¿Cuál es el valor total de siete ángulos iguales de $33^{\circ}\,43'\,24''$ cada uno?

24. Sabiendo que el mes lunar dura 29 días 12 horas 44 minutos y 3 segundos, dígase cuánto vale cada cuarto del mismo, por ejemplo el cuarto creciente.

Aprobado por el M. de E. y C.
Orden del 25-III-69
Boletín Oficial del 1-IV-69
1969 98 pts.

Distribuyen:

EDICIONES S. M. ● Gral. Tabanera, 39 - MADRID 19
BIBLIOGRAFICA ESPAÑOLA, S. A. ● Nieremberg, 14 - MADRID
EDITORIAL BRUÑO ● Bocángel, 15 - MADRID
EDITORIAL L. VIVES ● Fdo. el Católico, 63 - ZARAGOZA